BAUER - ...GRAVITATIONSTHEORIE

NS

UC SOUTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY
AA 000 571 907 5

THE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA LOS ANGELES

THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA LOS ANGELES
THE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA LOS ANGELES

Mathematische Einführung

in die

Gravitationstheorie Einsteins

nebst einer exakten Darstellung
ihrer wichtigsten Ergebnisse

Von

Prof. Dr. Hans Bauer

in Wien

Mit 17 Abbildungen

Leipzig und Wien
Franz Deuticke
1922

Verlags-Nr. 2756

PHYSICS LIBRARY UCLA

Verlag von Franz Deuticke in Leipzig und Wien

Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Naturwissenschaften

Von **Prof. Franz Exner**
Universität Wien

Inhalt: I. Raum, Zeit, Masse und einige allgemeine Begriffe. — II. Die Materie und ihre Konstitution. — III. Der Äther. — IV. Über Naturgesetze

Zweite, vermehrte Auflage. — Mit 97 Abbildungen im Text.
Preis geh. *M* 200.—, geb. *M* 250.—

Die Spektren der Elemente bei normalem Druck

Von **Prof. Franz Exner und Dr. Eduard Haschek**

Zugleich zweite, wesentlich vermehrte Auflage der Wellenlängentabellen für spektralanalytische Untersuchungen. 3 Bände. Preis *M* 370.—

Noch einmal sei abschließend auf die Vorzüge des Ganzen hingewiesen: die Einheitlichkeit der Durchführung, die Ausdehnung über das ganze sichtbare und ultraviolette Gebiet und die Kodifizierung der Intensitäten der Linien neben der ihrer Wellenlänge. Gerade die letzteren Angaben erweisen sich beim Gebrauch des Werkes zur Identifikation von Linien als ein außerordentlich wertvolles Hilfsmittel, wie sich Referent selbst überzeugen konnte. Dieser Kodex der Spektra ist ein Monument deutschen Fleißes und eine wertvolle Bereicherung der physikalischen Literatur.

A. Lampa, Zeitschrift für Elektrochemie, Bd. XX.

Entwurf einer Theorie der physikalischen Abhängigkeit

Von **Dr. Rudolf Orthner**

Preis *M* 24.—

Der Verfasser geht von dem Satze Machs aus: „Die Außenwelt ist ein Komplex von Empfindungen." Durch Analyse desselben gelangt er zur Aufstellung von Koordinatensystemen mit bestimmten Eigenschaften, die zur Beschreibung jedes beliebigen Objektes der Außenwelt geeignet sind. Im Anschluß daran erörtert Verfasser das Problem der physikalischen Abhängigkeit, die er der mathematischen Abhängigkeit von Zahlen an die Seite stellt, und kommt zu dem Schlusse, daß der „Mechanismus" der Abhängigkeiten immer darin besteht, daß Teile des betreffenden Koordinatensystems aneinandergefügt, d. h. physikalisch summiert werden. Dies führt unmittelbar zur Ausbildung eines neuen Verfahrens zur Aufstellung von Gleichungen zwischen physikalischen und geometrischen Größen. Außerdem werden noch naturphilosophische Fragen berührt, z. B. die Beziehung zwischen der wahrnehmbaren Außenwelt und den wirklichen Dingen sowie die Möglichkeit einer Erforschung der letzteren u. a. m.

Chemiker-Ztg. Cöthen.

Elemente der höheren Mathematik

für Studierende der technischen und Naturwissenschaften

Von **Dr. Lothar Schrutka**
Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn

Zweite, verbesserte Auflage. — Mit 143 Abbildungen im Text.
Preis geh. *M* 68.—, geb. *M* 108.—

Die astronomische Bestimmung der geographischen Koordinaten

Von **E. Gelcich**
Mit 46 Abbildungen im Texte
Preis *M* 25.—

Mathematische Einführung

in die

Gravitationstheorie Einsteins

nebst einer exakten Darstellung
ihrer wichtigsten Ergebnisse

Von

Prof. Dr. Hans Bauer

in Wien

Mit 17 Abbildungen

Leipzig und Wien
Franz Deuticke
1922

Verlags-Nr. 2756.

Buchdruckerei der Manzschen Verlags- und Universitäts-Buchhandlung in Wien.

DEM ANDENKEN MEINES ONKELS GEWIDMET

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist aus einer Reihe von Vorträgen hervorgegangen, die der Verfasser in der ersten Hälfte des verflossenen Jahres im akademischen Vereine deutscher Mathematiker und Physiker an der Wiener Universität gehalten hat. Die Überzeugung, daß zwischen den zahlreichen gemeinverständlichen Darstellungen, die sich aller feineren mathematischen Hilfsmittel entschlagen müssen, und den völlig strengen, bei ihrer Tiefgründigkeit aber schwer verständlichen Entwickelungen der Einsteinschen Gravitationstheorie noch immer eine gangbare Brücke fehle, dazu das Interesse, welchem die Ausführungen des Verfassers begegneten, waren der Anlaß zur Abfassung dieser Schrift.

Der Verfasser glaubt allen jenen einen Dienst zu erweisen, welchen populäre Darlegungen ob ihrer naturgemäßen Oberflächlichkeit nicht mehr genügen und die aus dem hieraus entspringenden Gefühle des Unbefriedigtseins das Bedürfnis hegen, in das geheimnisvoll anmutende Dickicht mathematischer Formeln Einblick zu gewinnen und die überraschenden, bereits durch die Erfahrung erprobten Ergebnisse auch selbst in ihrer Folgerichtigkeit zu begreifen. Dazu bedarf es freilich eines gehörigen Rüstzeuges und der Verfasser hat versucht, auf der unerläßlichen Grundlage der Infinitesimalrechnung unter Wahrung möglichster Klarheit und Anschaulichkeit gerade jene geometrischen Begriffe im Rahmen der Gaußschen Flächentheorie zu entwickeln, welche in ihrer Verallgemeinerung auf vier Dimensionen zu Angelpunkten der Gravitationstheorie Einsteins werden.

Es ist so möglich geworden, einen durchaus exakten, dabei aber doch leicht gangbaren Weg in das mathematische Innere der Einsteinschen Lehre zu bahnen, der den Leser nicht allein einen Blick in die Tensoralgebra tun läßt, sondern ihn auch befähigt, die wesentlichsten praktischen Folgerungen — die Perihelvorrückung des Merkur, die Lichtstrahlkrümmung — in aller Strenge abzuleiten und die numerischen Ergebnisse selbst nachzuprüfen. Damit erscheint auch der Boden für gründlichere Studien vorbereitet. In dieser Hinsicht sei auf das in jedem Belange klassisch zu nennende Werk von Hermann Weyl, Raum-Zeit-Materie, verwiesen.

Für einige wertvolle, die Klarheit der Darstellung fördernde Anregungen ist der Verfasser Herrn Prof. Dr. Josef Kling zu Dank verbunden. Dem Verlage gebührt das Verdienst, ungeachtet der gegenwärtigen schwierigen Verhältnisse das rasche Erscheinen des Buches ermöglicht zu haben.

Wien, Jänner 1922.

Dr. HANS BAUER.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

A. Geometrischer Teil:

I. Begriff der Parallelverschiebung und der geodätischen Linie:

a) Die Parallelverschiebung in der Ebene 4

b) Die Parallelverschiebung auf einer krummen Fläche:

1. Geodätische Koordinaten 8

2. Beliebige krummlinige (Gaußsche) Koordinaten . . . 10

3. Das Differentialgleichungssystem der geodätischen Linien in beliebigen krummlinigen Koordinaten 14

II. Die Parallelverschiebung auf einer Rotationsfläche. Gleichung der geodätischen Linien 15

III. Richtungsänderung eines Vektors bei einer Parallelverschiebung, bezogen auf beliebige Gaußsche Koordinaten:

a) Auf einer beliebigen krummen Fläche 20

b) Auf einer Rotationsfläche 23

IV. Unter welcher Bedingung erreicht ein Vektor bei Parallelverschiebung dieselbe Endstellung unabhängig vom gewählten Wege? 28

V. Der Krümmungstensor einer Rotationsfläche und sein Zusammenhang mit dem Gaußschen Krümmungsmaß 32

B. Physikalischer Teil:

I. Die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt 35

II. Verallgemeinerung der Parallelverschiebung und der geodätischen Linie sowie deren physikalische Bedeutung in der Gravitationstheorie 38

III. Verallgemeinerung des Krümmungstensors und seine Rolle in der Gravitationstheorie 45

Seite

IV. Ansatz für das Bogenelement der „Welt“ eines einzigen Massenpunktes. Berechnung der Γ^i_{kl} und des Krümmungstensors R_{kl} 50

V. Die Feldgleichungen der Schwere für einen einzelnen Massenpunkt und ihre Integration 57

VI. Physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten α. Die Geometrie des Schwerefeldes eines punktförmigen Massenzentrums 59

VII. Die Radialbewegung im Schwerefelde eines Massenpunktes . 65

VIII. Die Planetenbewegung vom Standpunkte der Gravitationstheorie Einsteins 77

IX. Die Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerefelde eines Massenpunktes 85

Schlußwort 96

Druckfehlerberichtigungen.

S. 7, Formel (5): Statt $\delta\,(r\,\delta\varphi)$ lies $\delta\,(r\,d\varphi)$.

S. 7, Z. 8 v. u. soll richtig lauten:

$$\delta\,dx = \cos\varphi\,\delta\,dr - r\sin\varphi\,\delta\,d\varphi - \sin\varphi\,dr\,\delta\varphi - \sin\varphi\,d\varphi\,\delta r -$$

S. 16, Formel (27): Statt $\frac{\partial\,g_{22}}{\partial\,\varphi} = 2\,r$ lies $\frac{\partial\,g_{22}}{\partial\,r} = 2\,r$.

S. 18, Z. 2 v. u. fehlt nach dem ersten Gleichheitszeichen ein Minuszeichen.

S. 21, Z. 8 v. u. fehlt die Formelnummer (40).

S. 46, Z. 3 v. u.: Statt (92) lies (82).

S. 47, Z. 6 v. u.: Statt $g = g_{im}\,G_{im}$ lies $g = \sum_{i=o}^{3} g_{im}\,G_{im}$.

S. 48, Formel (90): Statt Γ_{ki} lies Γ^{i}_{ki}.

S. 64, Formel (132′) soll richtig lauten: $\sigma_m = r\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} + \ldots}$

S. 80, Z. 5 v. o.: Statt (159) lies (156).

S. 89, Z. 7 v. o.: Statt „gegenüber $\frac{1}{\varepsilon}$“ lies „gegenüber 1“.

Einleitung.

„Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην“.
„Kein der Geometrie Unkundiger trete unter mein Dach“.
Platon.

Als Kepler sich um die Auffindung seiner weltbewegenden Gesetze bemühte, mag er seinem Werke wie ein Künstler gegenübergestanden sein, der mit scharfem Auge und sicherer Hand das Antlitz der Natur im Bilde festhält. Sein Ruhm ist die getreue und klare Wiedergabe des mit begnadetem Blick Geschauten. Er fragt zunächst nicht, warum Natur gerade solche Formen schuf. Da kam ein anderer, es war Newton, der den Wunderbau der Keplerschen Gesetze sah und dem die bloße Kenntnis ihrer Formen nicht genügte, der wissen wollte, warum denn all dies so geschehe und nicht anders. Er fand die Lösung in der Schwerkraft (Gravitation), deren Wirksamkeit er von der Erde auf den gesamten Weltraum übertrug und deren Stärke er messen lehrte. Heute ist sein Gravitationsgesetz Gemeingut aller Gebildeten geworden. Es stellt einen Markstein in der Entwicklung der Physik dar. Newton hat das gesetzmäßige Neben- und Nacheinander, das Kepler in seinen Gesetzen zum Ausdruck gebracht, in ein ursächliches Auseinanderfolgen verwandelt. Er hat auf dem Wege der Kausalität in der allgemeinen Gravitation die einheitliche Grundursache erkannt, die den Himmelskörpern ihre Bahnen anweist.

Und nun eine andere Frage. Ein jeder von uns hat auf der Schulbank die Geometrie Euklids gelernt und, wenn er auch den Namen des hellenischen Mathematikers vergessen haben mag, so sind ihm doch dessen Elemente in Fleisch und Blut übergegangen, daß er sich ihrer ganz unbewußt bedient. Wer sollte da denken, daß Geometrie, die schon seit Jahrtausenden betrieben wird, noch ein

Problem sein könne? Und doch mußte das Auftauchen verschiedener neuartiger Geometrien, die wir unter dem Namen der nichteuklidischen zusammenfassen, schließlich zur Frage führen: Warum zeichnen wir unter den verschiedenen möglichen Geometrien gerade die euklidische aus? Freilich ist sie die einfachste, aber das ist kein naturwissenschaftlicher Grund. Ist ein solcher überhaupt angebbar, können wir hier in gleicher Art und mit gleichem Recht die Frage stellen, welche einst Newton angesichts der Keplerschen Gesetze gestellt hat? Einsteins Antwort lautet: Ja. Und mehr als das, sie überrascht uns. Denn er behauptet mit der Kühnheit des genialen Denkers: Dieselbe Gravitation, die Newton für die Planetenbewegung verantwortlich gemacht hat, ebendiese Gravitation ist es, die allenthalben auch die geometrischen Eigenschaften des Beobachtungsraumes bestimmt, und die uns von Kindesbeinen an geläufige Geometrie wäre nicht die euklidische, wenn nicht die Gravitationswirkungen der uns umgebenden Materie so gering wären. Einsteins Tat entspricht völlig der Newtons und ist überdies deren wesentliche Ergänzung, da sie die Brücke ursächlichen Zusammenhanges schlägt aus dem Reiche des Naturgeschehens in ein ihm bisher ganz wesensfremdes Gebiet, in das Reich der Geometrie.

Geometrie und Gravitation bilden nunmehr eine Einheit in höherem Sinne, insoferne die Natur der ersteren durch die der letzteren bedingt erscheint. Schon etwa ein halbes Jahrhundert vor Einstein hat ein anderer deutscher Mathematiker, Bernhard Riemann, in seiner Habilitationsschrift „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrundeliegen“ die Vermutung ausgesprochen, es könnten die geometrischen Verhältnisse des Raumes durch „bindende Kräfte“ bestimmt sein, hat aber den angedeuteten Weg in das Gebiet der Physik nicht weiter verfolgt. Nun hat Einstein diese bindenden Kräfte in der Gravitation gefunden, die eine Eigenschaft aller Materie ist. Bestimmt aber die an einer Stelle des Raumes vorhandene Materie vermöge der ihr innewohnenden Schwere die dort herrschende Geometrie, so muß es gewisse geometrische Größen geben, die als Funktionen des materiellen Rauminhaltes erscheinen. Eine solche Geometrie kann nicht die euklidische sein, die einen von Ort zu Ort unveränderlichen, von der Materie unabhängigen Charakter trägt. Sie muß von allgemeinerer, noch unbestimmter Natur sein, d. h. sie muß Größen enthalten, die wir als Funktionen der Materie auffassen und als solche von Fall zu Fall bestimmen können. Die Grundlagen zu einer solchen allgemeineren Geometrie hat C. F. Gauß in seiner Flächentheorie geschaffen, auf welcher aufbauend der bereits erwähnte Mathematiker B. Riemann ein geometrisches Gebäude allgemeinster Art errichtet hat.

Damit erscheint der Weg vorgezeichnet, den wir im folgenden zu beschreiten haben. Wir müssen uns zunächst die notwendigen geometrischen Kenntnisse verschaffen, die uns befähigen, auf den Bahnen Einsteinscher Gedanken in das Reich physikalischen Geschehens hinüberzusteuern. Und in diesem Sinne soll auch der diesen Ausführungen vorangestellte Platonische Leitspruch verstanden sein. Demgemäß gliedert sich der Inhalt dieses Buches in zwei Teile, von denen der erste alle jene Sätze der Gaußschen Flächentheorie entwickelt, die in verallgemeinerter Gestalt (auf vier Dimensionen übertragen) im zweiten Teile Anwendung finden. In diesem wird im Sinne Einsteins der Zusammenhang mit der Physik hergestellt und die Grundlagen seiner Gravitationstheorie soweit ausgeführt, als sie zur exakten Behandlung des Schwerefeldes eines Massenpunktes nötig sind. Eine eingehende Erörterung der Radialbewegung in einem solchen Gravitationsfelde, die uns Aufschluß gibt über das Problem des freien Falles vom Standpunkte Einsteins, eine Darstellung der Abweichung der Planetenbewegung von den Keplerbahnen mit besonderer Berücksichtigung der Perihelvorrückung des Merkur sowie eine Untersuchung über die Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerefelde bilden das Endziel dieses Buches.

A. Geometrischer Teil.

I. Begriff der Parallelverschiebung und der geodätischen Linie.

a) Die Parallelverschiebung in der Ebene.

Unsere ersten Betrachtungen sollen sich auf die Ebene beziehen, auf die einem jeden vom ersten Geometrieunterricht geläufige euklidische Ebene. Wir denken uns in ihr an beliebiger Stelle eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung, einen Vektor, und wollen uns zunächst vergegenwärtigen, was wir unter einer Parallelverschiebung desselben verstehen. Da ist sofort klar, daß eine solche in der ständigen Beibehaltung der anfänglichen Länge und Richtung des Vektors besteht. Die erste Forderung scheint selbstverständlich, ist aber, wie wir später erkennen werden, wesentlich. Wie aber legen wir die Richtung des Vektors fest und wie versichern wir uns dessen, daß sie beständig beibehalten wird? Zu diesem Behufe denken wir uns die ganze Ebene mit einem möglichst engmaschigen Netz rechtwinkliger oder schiefwinkliger geradliniger Koordinaten überzogen; zur Verdeutlichung können wir uns etwa ein unendlich ausgedehntes Millimeterpapier vorstellen. Die Anfangsrichtung des gegebenen Vektors $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{v}$ wird dann durch den Winkel α festgelegt sein, den er mit einer Koordinatenachse, etwa der X-Achse, bildet, bzw. durch die Angabe seiner beiden Komponenten $\mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{v}_y$ (Abb. 1). Wenn wir den Vektor nun parallel verschieben, so müssen

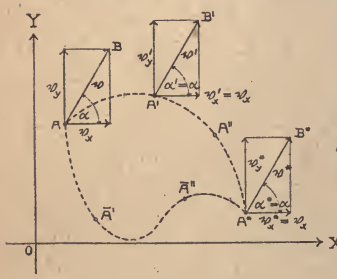


Abb. 1.

wir offenbar darauf achten, daß er auch in jeder anderen Lage $\overrightarrow{A'B'}$ bei gleichbleibender Länge mit der X-Richtung den gleichen Winkel $\alpha' = \alpha$ bildet, bzw. die gleichen Komponenten $\mathfrak{v}'_x = \mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{v}'_y = \mathfrak{v}_y$ besitzt. Wir können so den Vektor auf dem Wege $AA'A'' \ldots A^*$ in eine bestimmte Endstellung $\overrightarrow{A^* B^*}$ bringen und es ist im Hinblicke auf die durchwegs gleichartige Beschaffenheit der Ebene ohneweiters klar, daß wir zur gleichen Endstellung auch auf einem beliebigen anderen Wege $AA'A'' \ldots A^*$ gelangen, der ebenfalls in A^* endet. Bezeichnen wir eine Änderung des Winkels α mit $\Delta\alpha$,

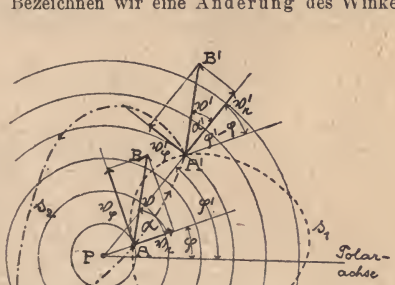


Abb. 2.

eine solche der Komponenten $\mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{v}_y$ mit $\Delta\mathfrak{v}_x$ und $\Delta\mathfrak{v}_y$, so ist die Parallelverschiebung definiert durch die Gleichungen:

$$\Delta\alpha = 0, \quad \Delta|\mathfrak{v}| = 0^1), \text{ bzw. } \Delta\mathfrak{v}_x = \Delta\mathfrak{v}_y = 0. \qquad (1)$$

Nachdem wir so unter Zugrundelegung geradliniger Koordinaten die Parallelverschiebung in der Ebene erklärt haben, wollen wir danach fragen, wie sich derselbe Sachverhalt bei Verwendung krummliniger Koordinaten darstellt. Wir wählen im besonderen gewöhnliche Polarkoordinaten r, φ und denken uns wieder einen Vektor $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{v}$ in der Anfangslage (Abb. 2). Seine Komponenten seien jetzt $\mathfrak{v}_r$ und $\mathfrak{v}_\varphi$ und sein Winkel mit der Richtung des Radius-

[1]) $|\mathfrak{v}|$ bedeutet die Länge oder den absoluten Betrag des Vektors $\mathfrak{v}$.

vektors r sei α. Verschieben wir nun den Vektor parallel im oben definierten Sinne nach $\overrightarrow{A'B'}$, so werden seine Komponenten nunmehr $\mathfrak{v}'_r$ und $\mathfrak{v}'_\varphi$ sein. Der Winkel zwischen $\mathfrak{v}'$ und der Richtung des zu A' gehörigen Radiusvektors sei α'. $\mathfrak{v}'_r$, $\mathfrak{v}'_\varphi$, α' sind dann nicht mehr gleich den entsprechenden Werten $\mathfrak{v}_r$, $\mathfrak{v}_\varphi$, α; es bestehen vielmehr die folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{v}_r = |\mathfrak{v}| \cos \alpha,\ \mathfrak{v}_\varphi = |\mathfrak{v}| \sin \alpha;$$
$$|\mathfrak{v}'| = |\mathfrak{v}|,\ \alpha' = \alpha - (\varphi' - \varphi),$$
$$\mathfrak{v}'_r = |\mathfrak{v}'| \cos \alpha' = |\mathfrak{v}| \cos [\alpha - (\varphi' - \varphi)],$$
$$\mathfrak{v}'_\varphi = |\mathfrak{v}'| \sin \alpha' = |\mathfrak{v}| \sin [\alpha - (\varphi' - \varphi)],$$

woraus

$$\mathfrak{v}'_r = \mathfrak{v}_r \cos (\varphi' - \varphi) + \mathfrak{v}_\varphi \sin (\varphi' - \varphi),$$
$$\mathfrak{v}'_\varphi = \mathfrak{v}_\varphi \cos (\varphi' - \varphi) - \mathfrak{v}_r \sin (\varphi' - \varphi)$$

folgt.

$\mathfrak{v}_r$, $\mathfrak{v}_\varphi$ und α erleiden somit bei Parallelverschiebung eine Änderung im Betrage:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \alpha = \alpha' - \alpha = -(\varphi' - \varphi) = -\Delta \varphi, \Delta |\mathfrak{v}| = 0; \\ &\Delta \mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}'_r - \mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}_r (\cos \Delta \varphi - 1) + \mathfrak{v}_\varphi \sin \Delta \varphi, \\ &\Delta \mathfrak{v}_\varphi = \mathfrak{v}'_\varphi - \mathfrak{v}_\varphi = -\mathfrak{v}_r \sin \Delta \varphi + \mathfrak{v}_\varphi (\cos \Delta \varphi - 1). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Es ist bemerkenswert, daß die Änderung von α, $\mathfrak{v}_r$, $\mathfrak{v}_\varphi$ nur von der Änderung $\Delta \varphi$ des Polarwinkels φ, nicht aber von der Änderung Δr des Radiusvektors r abhängt. Beschreiben wir insbesondere mit dem Vektor $\mathfrak{v}$ einen geschlossenen Weg s_1, der den Pol P des Koordinatensystems nicht enthält, so ist $\Delta \varphi = 0$ und ebenso nach (2) $\Delta \alpha = \Delta \mathfrak{v}_r = \Delta \mathfrak{v}_\varphi = 0$; es kehrt also der Vektor bei ungeändertem Winkel α in seine Anfangslage zurück. Lassen wir dagegen den Vektor $\mathfrak{v}$ einen geschlossenen Weg s_2 durchlaufen, der den Pol P im Sinne des in Fig. 2 angedeuteten Pfeiles umkreist, so wird $\Delta \varphi = 2\pi$ und nach (2) $\Delta \alpha = -2\pi$, $\Delta \mathfrak{v}_r = \Delta \mathfrak{v}_\varphi = 0$; d. h. der Vektor kehrt gleichfalls in seine Anfangslage zurück, der Winkel α hat aber um 2π abgenommen.

Wir wollen die Formeln (2) noch auf den besonderen Fall anwenden, daß die Verschiebungen Δr und $\Delta \varphi$ unendlich klein, d. h. praktisch sehr klein sind, auf eine infinitesimale Parallelverschiebung. Wir bezeichnen die Verschiebungsgrößen dann mit δr und $\delta \varphi$ und erhalten aus (2) dementsprechend

$$\left.\begin{aligned} &\delta \alpha = -\delta \varphi,\ \delta |\mathfrak{v}| = 0; \\ &\delta \mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}_\varphi \delta \varphi,\ \delta \mathfrak{v}_\varphi = -\mathfrak{v}_r \delta \varphi, \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

da dann $\cos \delta \varphi \sim 1$ und $\sin \delta \varphi \sim \delta \varphi$ wird.

Schon an dieser Stelle sei ferner die Aufmerksamkeit auf einen infinitesimalen Vektor gelenkt, der uns im folgenden noch oft begegnen wird: auf das Bogen- oder Linienelement $d\mathfrak{s}$, dessen Betrag wir stets mit ds bezeichnen wollen, mit den Komponenten dx, dy bzw. $dr, d\varphi$. In der euklidischen Ebene gilt dann der pythagoreische Lehrsatz in der Form:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nehmen wir nun mit dem Vektor $d\mathfrak{s}$ eine infinitesimale Parallelverschiebung vor, so ist nach (1), welche Formel sich auf die infinitesimale Parallelverschiebung unverändert überträgt:

$$\delta dx = \delta dy = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

nach (2′) wegen $\mathfrak{v}_r = dr$, $\mathfrak{v}_\varphi = r d\varphi$

$$\delta dr = r d\varphi \delta\varphi, \quad \delta(r d\varphi) = -dr \delta\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder

$$\delta r d\varphi + r \delta d\varphi = -dr \delta\varphi$$

oder endlich

$$\delta d\varphi = -\frac{dr \delta\varphi + d\varphi \delta r}{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

(5) und (6) kennzeichnen die Parallelverschiebung des Bogenelementes $d\mathfrak{s}$ bei Zugrundelegung von Polarkoordinaten.

Die Formeln (5) und (6) lassen sich aus (4) auch mit Benützung der Koordinatentransformation

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

folgendermaßen gewinnen:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos\varphi\, dr - r \sin\varphi\, d\varphi,$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin\varphi\, dr + r \cos\varphi\, d\varphi.$$

Daraus erhalten wir weiter mit Berücksichtigung von (4):

$$\delta dx = \cos\varphi\, \delta dr - r \sin\varphi\, \delta d\varphi - \sin\varphi\, dr\, \delta\varphi - \sin d\varphi\, \delta r - r \cos\varphi\, d\varphi\, \delta\varphi = 0,$$
$$\delta dy = \sin\varphi\, \delta dr + r \cos\varphi\, \delta d\varphi + \cos\varphi\, dr\, \delta\varphi + \cos\varphi\, d\varphi\, \delta r - r \sin\varphi\, d\varphi\, \delta\varphi = 0$$

und können nun aus diesen beiden Gleichungen δdr und $\delta d\varphi$ berechnen. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die erste mit $\cos\varphi$, die zweite mit $\sin\varphi$ und addieren:

$$\delta dr = r d\varphi \delta\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Zur Gewinnung von δdy multiplizieren wir die erste Gleichung mit $-\sin\varphi$, die zweite mit $\cos\varphi$ und addieren wieder:

$$r\,\delta d\varphi = -dr\,\delta\varphi - d\varphi\,\delta r$$

oder

$$\delta d\varphi = -\frac{dr\,\delta\varphi + d\varphi\,\delta r}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wir wollen noch $\delta|d\mathfrak{s}| = \delta ds$ berechnen. Aus (3) folgt zunächst

$$ds\,\delta ds = dr\,\delta dr + r\,d\varphi^2\,\delta r + r^2 d\varphi\,\delta d\varphi;$$

wir setzen (5) und (6) ein und erhalten weiter:

$$ds\,\delta ds = r\,dr\,d\varphi\,\delta\varphi + r\,d\varphi^2\,\delta r - r\,dr\,d\varphi\,\delta\varphi - r\,d\varphi^2\,\delta r = 0$$

oder

$$\delta ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

als Ausdruck dafür, daß sich bei einer Parallelverschiebung der Betrag des verschobenen Vektors nicht ändert.

Im Hinblicke auf die Tatsache, daß (4') als Folge von (3), (5) und (6) erscheint, wobei (5) und (6) hinwiederum aus (4) und (7) gewonnen sind, ist zu erwarten, daß umgekehrt bei Unkenntnis von (7) die Berechnung von (5) und (6) aus (3), (4) und (4') möglich sein wird. In der Tat wird gerade dieser Weg für unsere späteren Betrachtungen von besonderer Bedeutung sein.

Verschieben wir in der Ebene einen Vektor insbesondere so, daß er sich stets in seiner eigenen Richtung bewegt, so erscheint durch diese besondere Art von Parallelverschiebung unter allen ebenen Kurven die Gerade als Bahn des bewegten Vektors ausgezeichnet. Sie ist die Linie stets gleichbleibender Richtung und hat zudem die Eigenschaft, zwei beliebige ihrer Punkte auf dem kürzesten Wege miteinander zu verbinden. Wir wollen nicht bloß in der Ebene, sondern allgemein auch auf krummen Flächen solche Linien als geodätische bezeichnen. Es gilt dann der Satz: Die geodätischen Linien der euklidischen Ebene sind die Geraden.

b) Die Parallelverschiebung auf einer krummen Fläche.

1. Geodätische Koordinaten.

Versuchen wir auf einer krummen Fläche in derselben Weise wie in der Ebene die Parallelverschiebung zu definieren, so stoßen wir sogleich auf eine wesentliche Schwierigkeit. In der Ebene waren es die geradlinigen Koordinatensysteme, welche durch die Bedingung (1), bzw. (4) der Unveränderlichkeit der Vektorkomponenten

eine einfache und klare Festlegung der Parallelverschiebung eines Vektors ermöglichten. Auf einer krummen Fläche kann es zwar auch gerade Linien geben, wie etwa auf den Kegel-, Zylinder- und allgemeiner den Regelflächen, aber diese Geraden verlaufen von einer bestimmten Stelle der Fläche aus nicht nach allen Richtungen. Können wir also auch entlang einer solchen Geraden an der früheren Definition der Parallelverschiebung festhalten, indem wir die krumme Fläche durch die diese Gerade enthaltende Tangentialebene ersetzen und den Winkel zwischen dem in der Tangentialebene zu denkenden Vektor und der Geraden konstant halten, so sind wir doch bei einer Verschiebung in einer beliebigen anderen Richtung ratlos. Dazu kommt, daß bei der überwiegenden Mehrheit der Flächen Gerade, welche der Fläche selbst angehören, gar nicht vorhanden sind, z. B. bei der Kugel, den Ellipsoiden usw. Wir wollen daher gleich die grundlegende Frage stellen: Können wir auf einer krummen Fläche Normalkoordinatensysteme derart wählen, daß sich in bezug auf diese die Parallelverschiebung eines Vektors in derselben einfachen Weise festlegen läßt wie in der Ebene durch die Bedingung (1), bzw. (4) in bezug auf alle geradlinigen Systeme?

Dies ist in der Tat möglich, wenn wir im Sinne des letzten Absatzes von a) auf der krummen Fläche jene Linien auszeichnen, welche den Geraden der Ebene entsprechen und die wir geodätisch genannt haben. Ein aus solchen Linien gebildetes Koordinatensystem soll ein geodätisches System heißen. Wenn auf einer krummen Fläche Gerade vorkommen, so gehören sie sicher zu den geodätischen Linien derselben und in diesem Falle ist, wie schon erwähnt, die Definition der Parallelverschiebung unmittelbar übertragbar. Sind die geodätischen Linien jedoch krumm, wie z. B. die Großkreise der Kugel, so haben wir uns die Parallelverschiebung folgendermaßen zu denken.

Wir legen an die Fläche im Ausgangspunkte A der Verschiebung (Abb. 3) die Tangentialebene, denken uns in ihr den Vektor $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{v}$ und die in die Tangentialebene fallenden Bogenelemente der geodätischen Linien Y_1 und Y_2, welche zum gewählten geodätischen Koordinatensystem gehören. Verlängern wir diese Bogenelemente, so erhalten wir in der Tangentialebene ein System geradliniger Koordinaten, in bezug auf welche wir die Komponenten des gegebenen Vektors $\mathfrak{v}_{y_1}$, $\mathfrak{v}_{y_2}$ bestimmen können. Wir wollen nun sagen, daß eine infinitesimale Parallelverschiebung ds des Vektors $\mathfrak{v}$ von A nach A' statt-

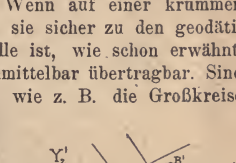


Abb. 3.

gefunden habe, wenn der unter Beibehaltung seiner Länge verschobene Vektor $\mathfrak{v}'$ ($|\mathfrak{v}'| = |\mathfrak{v}|$) in der zum Nachbarpunkt A' gehörigen Tangentialebene in bezug auf die zugehörigen geodätischen Linien Y_1' und Y_2' dieselben Komponenten $\mathfrak{v}'_{y'_1} = \mathfrak{v}_{y_1}$ und $\mathfrak{v}'_{y'_2} = \mathfrak{v}_{y_2}$ besitzt. Eine Parallelverschiebung von endlicher Länge haben wir uns durch Aneinanderreihung von infinitesimalen Parallelverschiebungen entstanden zu denken. Es entspricht dies der Tatsache, daß wir auf einer krummen Fläche einfache geometrische Verhältnisse nur in der nächsten Umgebung eines Flächenpunktes antreffen, soweit wir die Fläche durch ihre Tangentialebene ersetzen können. Aus der Ferngeometrie der euklidischen Ebene ist auf krummen Flächen eine Nahegeometrie geworden.

Wir wollen uns nun der mathematischen Formulierung der eben festgelegten Parallelverschiebung auf einer krummen Fläche zuwenden. y_1, y_2 sei ein System geodätischer Koordinaten auf der Fläche. Hat ein Vektor $\mathfrak{v}$ in bezug auf diese Koordinaten die Komponenten $\mathfrak{v}_{y_1}$ und $\mathfrak{v}_{y_2}$, so nennen wir eine beliebige Verschiebung ds desselben dann eine infinitesimale Parallelverschiebung, wenn dabei die Komponenten $\mathfrak{v}_{y_1}$ und $\mathfrak{v}_{y_2}$ keine Veränderung erleiden:

$$\delta \mathfrak{v}_{y_1} = \delta \mathfrak{v}_{y_2} = 0; \quad \delta |\mathfrak{v}| = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Betrachten wir als den zu verschiebenden Vektor insbesondere das Bogenelement $d\mathfrak{s}$ der Fläche, mit den geodätischen Komponenten dy_1 und dy_2, so folgt aus (8):

$$\delta\, dy_1 = \delta\, dy_2 = 0; \quad \delta\, ds = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

2. Beliebige krummlinige (Gaußsche) Koordinaten.

Da im allgemeinen für die geometrische Behandlung krummer Flächen keine bequemen geodätischen Koordinaten zur Verfügung stehen, müssen wir versuchen, einen Ausdruck für die Parallelverschiebung in beliebigen krummlinigen Koordinaten zu gewinnen. Bezeichnen wir wieder wie unter 1. mit y_1, y_2 ein System geodätischer Koordinaten, so wird zwischen diesem und einem System beliebiger krummliniger Koordinaten x_1, x_2 auf der Fläche eine Beziehung der Art bestehen, daß sich die geodätischen Koordinaten y_1, y_2 als bestimmte Funktionen der Koordinaten x_1, x_2 darstellen lassen:

$$y_1 = y_1(x_1, x_2), \quad y_2 = y_2(x_1, x_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Vergl. damit die Gleichungen (7). Durch totale Differentiation folgt aus (9):

$$\left.\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\, dx_2, \\ dy_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\, dx_2; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

dabei bedeuten dx_1, dx_2 die Komponenten des Bogenelementes $d\bar{s}$ im Koordinatensystem x_1, x_2, während dy_1, dy_2 wie schon erwähnt, die Komponenten von $d\bar{s}$ im geodätischen System sind.

Nun ist eine grundlegende Voraussetzung der Gauß'schen Flächentheorie, daß sich das Quadrat des Bogenelementes immer als eine quadratische Form der Koordinatendifferentiale darstellen läßt:

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2\,g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2, \quad . \quad . \quad (11)$$

wofür wir mit Weglassung des Summenzeichens kurz schreiben wollen:

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11')$$

indem wir vereinbaren, daß über Indizes, welche in einem Term zweimal auftreten, von 1 bis 2 summiert werden soll. Die Größen g_{11}, $g_{12} = g_{21}$, g_{22} sind als Funktionen der Koordinaten x_1, x_2 anzusehen und bilden als Koeffizienten einer quadratischen Form einen sogenannten Tensor 2. Stufe, welcher symmetrisch ist: $g_{ik} = g_{ki}$. Wir nennen ihn den metrischen Fundamentaltensor der Fläche, da die quadratische Differentialform (11), deren Koeffizienten er darstellt, die messende Geometrie oder Metrik der Fläche bestimmt.

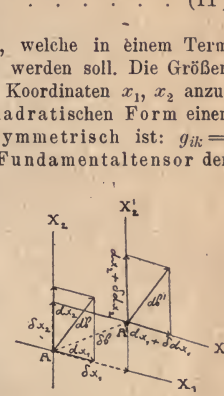


Abb. 4.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Änderungen $\delta\,dx_1$ und $\delta\,dx_2$ bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung $\delta\bar{s}$ mit den Komponenten δx_1 und δx_2 zu berechnen, welche gemäß unseren früheren Ausführungen durch (8′) gekennzeichnet ist. Siehe hiezu Abb. 4. Wir finden somit aus (10) mit Berücksichtigung von (8′):

$$\begin{aligned}\delta\,dy_1 &= \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\delta x_1 + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\,\partial x_2}\delta x_2\right)dx_1 + \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\,\partial x_2}\delta x_1 + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}\delta x_2\right)dx_2 + \\ &\quad + \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\,\delta\,dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\,\delta\,dx_2 = 0, \\ \delta\,dy_2 &= \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2}\delta x_1 + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1\,\partial x_2}\delta x_2\right)dx_1 + \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1\,\partial x_2}\delta x_1 + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}\delta x_2\right)dx_2 + \\ &\quad + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\,\delta\,dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\,\delta\,dx_2 = 0\end{aligned} \quad (12)$$

und erhalten daraus, wenn wir zur Abkürzung

$$\Delta = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right),\\
\Gamma^1_{12} &= \Gamma^1_{21} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right),\\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right),\\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right),\\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right),\\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

setzen, für δdx_1 und δdx_2 die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\delta dx_1 &= -(\Gamma^1_{11}\, dx_1 \delta x_1 + \Gamma^1_{12}\, dx_1 \delta x_2 + \Gamma^1_{21}\, dx_2 \delta x_1 + \\
&\qquad + \Gamma^1_{22}\, dx_2 \delta x_2),\\
\delta dx_2 &= -(\Gamma^2_{11}\, dx_1 \delta x_1 + \Gamma^2_{12}\, dx_1 \delta x_2 + \Gamma^2_{21}\, dx_2 \delta x_1 + \\
&\qquad + \Gamma^2_{22}\, dx_2 \delta x_2),
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

für welche wir nach dem oben getroffenen Übereinkommen kurz schreiben können:

$$\delta dx_1 = -\Gamma^1_{ik}\, dx_i \delta x_k, \quad \delta dx_2 = -\Gamma^2_{ik}\, dx_i \delta x_k. \quad . \quad (15')$$

Die hierin auftretenden Größen Γ^l_{ik}, welche häufig auch in der Form $\left\{\begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix}\right\}$ geschrieben werden, führen den Namen Christoffelsche Dreiindizessymbole und bilden als Koeffizienten zweier Bilinearformen (linear in bezug auf dx_1 und dx_2, sowie in bezug auf δx_1 und δx_2) einen Tensor 3. Stufe, der hinsichtlich der unteren Indizes symmetrisch ist: $\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{ki}$. Die Größen Γ^l_{ik} können durch die Formeln (14) erst dann bestimmt werden, sobald nähere Angaben über die Gestalt der Funktionen (9) bekannt sind, d. h. sobald wir über die Metrik der Fläche Bescheid wissen. Nun kommt aber die auf der Fläche geltende Maßbestimmung auch in dem verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatz (11) zum Ausdruck. Es ist daher zu erwarten, daß es möglich sein wird, die Größen Γ^l_{ik} als Funktionen der Koeffizienten g_{ik} darzustellen. Zu diesem Zwecke erinnern wir uns an die Tatsache, daß der Betrag eines Vektors (hier des Bogenelementes) bei einer Parallelverschiebung (übrigens auch bei jeder

anderen Verschiebung) keine Änderung gemäß Formel (8) erfährt; es gilt somit: $\delta\, ds = 0$. Wir berechnen nun aus (11) $\delta(ds^2)$, welcher Ausdruck gleichfalls verschwinden muß, da mit ds auch ds^2 ungeändert bleibt:

$$\begin{aligned}\delta(ds^2) = &\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\delta x_2\right) dx_1^{\,2} + 2\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}\delta x_2\right) dx_1\, dx_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}\delta x_2\right) dx_2^{\,2} + 2\, g_{11}\, dx_1\, \delta dx_1 + \\ &+ 2\, g_{12}\, dx_1\, \delta dx_2 + 2\, g_{12}\, dx_2\, \delta dx_1 + 2\, g_{22}\, dx_2\, \delta dx_2 = 0.\end{aligned} \tag{16}$$

In dieser Gleichung ersetzen wir $\delta\, dx_1$ und $d\, \delta x_2$ durch die oben gefundenen Ausdrücke (15) und erhalten so:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - 2\, g_{11}\Gamma^1_{11} - 2\, g_{12}\Gamma^2_{11}\right) dx_1^{\,2}\, \delta x_1 + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - 2\, g_{11}\Gamma^1_{12} - \right. \\ &- 2\, g_{12}\Gamma^2_{12}\Big) dx_1^{\,2}\, \delta x_2 + 2\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - g_{11}\Gamma^1_{12} - g_{12}\Gamma^2_{12} - \right. \\ &- g_{12}\Gamma^1_{11} - g_{22}\Gamma^2_{11}\Big) dx_1\, dx_2\, \delta x_1 + 2\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - g_{11}\Gamma^1_{22} - \right. \\ &- g_{12}\Gamma^2_{22} - g_{12}\Gamma^1_{12} - g_{22}\Gamma^2_{12}\Big) dx_1\, dx_2\, \delta x_2 + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} - \right. \\ &- 2\, g_{12}\Gamma^1_{12} - 2\, g_{22}\Gamma^2_{12}\Big) dx_2^{\,2}\, \delta x_1 + \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} - 2\, g_{12}\Gamma^1_{22} - \right. \\ &- 2\, g_{22}\Gamma^2_{22}\Big) dx_2^{\,2}\, \delta x_2 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

eine in bezug auf dx_1, dx_2 quadratische, in bezug auf δx_1, δx_2 lineare Differentialform, welche für beliebige Werte der dx_1, dx_2, sowie der δx_1, δx_2, also identisch verschwinden muß. Dies ist nur so möglich, daß ihre sämtlichen sechs Koeffizienten verschwinden, was zu folgendem Gleichungssystem führt:

$$\left.\begin{aligned}
&(a)\quad g_{11}\Gamma^1_{11} + g_{12}\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\\
&(b)\quad g_{11}\Gamma^1_{12} + g_{12}\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\\
&(c)\quad g_{12}\Gamma^1_{11} + g_{11}\Gamma^1_{12} + g_{22}\Gamma^2_{11} + g_{12}\Gamma^2_{12} = \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}\\
&(d)\quad g_{12}\Gamma^1_{12} + g_{11}\Gamma^1_{22} + g_{22}\Gamma^2_{12} + g_{12}\Gamma^2_{22} = \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}\\
&(e)\quad g_{12}\Gamma^1_{12} + g_{22}\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\\
&(f)\quad g_{12}\Gamma^1_{22} + g_{22}\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Aus diesem können wir die sechs unbekannten Größen Γ^l_{ik} berechnen. Wir finden, indem wir

$$g = g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

(Determinante der g_{ik}) setzen, aus *(a)* und *(c)* — *(b)*:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{g}\left(\frac{g_{22}}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{g_{12}}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}\right), \\ \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{g}\left(g_{11}\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{g_{11}}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - \frac{g_{12}}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right); \end{aligned}\right\} \quad . \quad (18_1)$$

aus *(b)* und *(e)*:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2g}\left(g_{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - g_{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right), \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2g}\left(g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} - g_{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (18_2)$$

und endlich aus *(f)* und *(d)* — *(e)*:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{g}\left(g_{22}\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{g_{22}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} - \frac{g_{12}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}\right), \\ \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{g}\left(\frac{g_{11}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} + \frac{g_{12}}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} - g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}\right). \end{aligned}\right\} \quad . \quad (18_3)$$

3. Das Differentialgleichungssystem der geodätischen Linien in beliebigen krummlinigen Koordinaten.

Wenn wir in der Ebene das Bogenelement, also einen unendlich kleinen Vektor, in seiner eigenen Richtung parallel verschieben, so erhalten wir bei unbegrenzter Wiederholung dieses Vorganges jene Gerade, welche das ursprüngliche Bogenelement enthält. Vergleiche die Schlußbetrachtung unter *a)*. Da aber die Geraden zugleich die geodätischen Linien der Ebene sind, können wir den Sachverhalt auch so ausdrücken: Durch Parallelverschiebung des Bogenelementes in seiner eigenen Richtung entsteht eine geodätische Linie. Ebendieser Satz gilt nun nicht allein für die Ebene, sondern für jede beliebige krumme Fläche.

Darauf aufbauend, wollen wir nun die Gleichungen der geodätischen Linien für eine beliebige Fläche in beliebigen Gaußschen Koordinaten ableiten. Fällt die Richtung der Parallelverschiebung $\delta\bar{s}$ mit der des Bogenelementes $d\bar{s}$ zusammen, so wird $\delta s = ds$ und insbesondere

$$\delta x_1 = dx_1,\ \delta x_2 = dx_2;\ \delta\,dx_1 = d^2x_1,\ \delta\,dx_2 = d^2x_2 \quad (19)$$

und es folgt aus den Formeln (15), bzw. (15′):

$$\left.\begin{aligned} d^2x_1 &= -(\Gamma^1_{11}\,dx_1^2 + 2\,\Gamma^1_{12}\,dx_1\,dx_2 + \Gamma^1_{22}\,dx_2^2) = \\ &= -\Gamma^1_{ik}\,dx_i\,dx_k, \\ d^2x_2 &= -(\Gamma^2_{11}\,dx_1^2 + 2\,\Gamma^2_{12}\,dx_1\,dx_2 + \Gamma^2_{22}\,dx_2^2) = \\ &= -\Gamma^2_{ik}\,dx_i\,dx_k. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Die Gleichungen (20) haben folgenden Inhalt. Die Komponenten dx_1, dx_2 des Bogenelementes $d\mathfrak{s}$ erfahren bei einer infinitesimalen Parallelverschiebung desselben in seiner eigenen Richtung Änderungen, deren Betrag durch (20) bestimmt wird, wobei die Γ^l_{ik} gemäß den Formeln (18_1) bis (18_3) als Funktionen der g_{ik} und ihrer ersten Ableitungen zu denken sind. Fassen wir nun weiter x_1 und x_2 als Funktionen eines bestimmten Parameters, etwa der Bogenlänge s auf, so ergeben sich aus (20) bei Division durch ds^2 die Differentialgleichungen einer auf der krummen Fläche [gekennzeichnet durch die Maßbestimmung (11)] befindlichen Kurve in Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{ds^2} &= -\Gamma^1_{11}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - 2\,\Gamma^1_{12}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} - \Gamma^1_{22}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2, \\ \frac{d^2x_2}{ds^2} &= -\Gamma^2_{11}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - 2\,\Gamma^2_{12}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_2}{ds} - \Gamma^2_{22}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\frac{d^2x_l}{ds^2} = -\Gamma^l_{ik}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds};\ i,\ k,\ l = 1,2. \quad . \quad . \quad . \quad (21')$$

Da nun durch Parallelverschiebung des Bogenelementes in seiner eigenen Richtung eine geodätische Linie auf der Fläche erzeugt wird, so haben wir in (21), bzw. (21′) das eine solche bestimmende System von Differentialgleichungen (bezogen auf die Bogenlänge s als Parameter) vor uns.

II. Die Parallelverschiebung auf einer Rotationsfläche. Gleichung der geodätischen Linien.

Eine allgemeine Rotationsfläche entsteht durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in derselben Ebene befindliche Gerade als Achse. Wir bezeichnen die erzeugende Kurve, da jede durch die Achse gehende Ebene (Meridianebene) die Fläche in einer solchen schneidet, als Meridiankurve. Ihre Gleichung, bezogen auf die Rotationsachse z und eine zu dieser normale Gerade r, sei

$$z = f(r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Ihr Bogenelement $d\sigma_m$ läßt sich im Hinblicke auf Abb. 5 aus $f(r)$ berechnen:

$$d\sigma_m = \frac{dr}{\cos\chi}$$

und da $tg\chi = \frac{df}{dr} = f'$ und $\frac{1}{\cos^2\chi} = 1 + tg^2\chi$ ist,

$$d\sigma_m = dr\sqrt{1+f'^2} \quad . \quad . \quad (23)$$

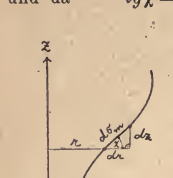


Abb. 5.

Es ist nun leicht, das Bogenelement ds der Rotationsfläche selbst anzugeben, welches sich aus den Komponenten $d\sigma_m$ und dem darauf senkrechten Bogenelement des Parallelkreises mit dem Radius r: $r\,d\varphi$ zusammengesetzt, wobei φ den im positiven Sinne von einer bestimmten Nullmeridianebene im Bogenmaße gerechneten Winkel bedeutet. Demnach ist:

$$ds^2 = d\sigma_m{}^2 + r^2 d\varphi^2 = (1+f'^2)\,dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad . \quad (24)$$

das gesuchte Bogenelement der Rotationsfläche.

Wir gehen nun daran, die zur Bestimmung einer infinitesimalen Parallelverschiebung nötigen Komponenten des Christoffelschen Tensors Γ^l_{ik} zu berechnen. Durch Vergleich von (24) mit der allgemeinen Form (11) lesen wir zunächst die Werte der g_{ik} ab:

$$g_{11} = 1 + f'^2,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = r^2, \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

wenn wir $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$ setzen; dazu die Determinante

$$g = g_{11}\,g_{22} = r^2(1+f'^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Wir finden daraus weiter:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial g_{11}}{\partial r} = 2f'f'',\ \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} = 0;\ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = 2r,\ \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi} = 0;\\ &\frac{\partial g_{12}}{\partial r} = \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

und erhalten für die Γ^l_{ik} den Formeln (18_1) bis (18_3) zufolge die Werte:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \frac{g_{22}}{2g}\frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{f'f''}{1+f'^2}, && \Gamma^2_{11} = 0;\\ &\Gamma^1_{12} = 0, && \Gamma^2_{12} = \frac{g_{11}}{2g}\frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{1}{r};\\ &\Gamma^1_{22} = -\frac{g_{22}}{2g}\frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -\frac{r}{1+f'^2}, && \Gamma^2_{22} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Für eine infinitesimale Parallelverschiebung folgt daher aus (15):

$$\left.\begin{aligned} \delta\, dr &= \frac{-f' f''\, dr\, \delta r + r\, d\varphi\, \delta\varphi}{1+f'^2}, \\ \delta\, d\varphi &= -\frac{1}{r}(d\varphi\, \delta r + dr\, \delta\varphi). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (29)$$

Wir wollen einige Sonderfälle betrachten:

1. Kegel. $f' = k$ (konst.), $f'' = 0$

$$\delta\, dr = \frac{r}{1+k^2}\, d\varphi\, \delta\varphi, \quad \delta\, d\varphi = -\frac{1}{r}(d\varphi\, \delta r + dr\, \delta\varphi) \quad . \quad (29_1)$$

2. Ebene. $f' = 0, \quad f'' = 0$

$$\delta\, dr = r\, d\varphi\, \delta\varphi, \quad \delta\, d\varphi = -\frac{1}{r}(d\varphi\, \delta r + dr\, \delta\varphi) \quad . \quad . \quad (29_2)$$

in Übereinstimmung mit (5) und (6).

3. Zylinder. $f' = \pm\infty, \quad r = a$ (konst.), $dr = \delta r = 0$

$$\delta\, dr = 0, \quad \delta\, d\varphi = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29_3)$$

d. h. r und φ sind gemäß (8′) geodätische Koordinaten.

4. Kugel.

$$f = \pm\sqrt{R^2 - r^2}, \quad f' = \mp\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}, \quad f'' = \mp\frac{R^2}{(R^2-r^2)^{3/2}},$$

$$f' f'' = \frac{R^2 r}{(R^2-r^2)^2}, \quad 1+f'^2 = \frac{R^2}{R^2-r^2};$$

also

$$\left.\begin{aligned} \delta\, dr &= -\frac{r}{R^2-r^2}\, dr\, \delta r + \frac{r(R^2-r^2)}{R^2}\, d\varphi\, \delta\varphi, \\ \delta\, d\varphi &= -\frac{1}{r}(d\varphi\, \delta r + dr\, \delta\varphi); \end{aligned}\right\} \quad . \quad (29_4)$$

dabei bedeutet R den Radius der Kugel.

Um ferner das Differentialgleichungssystem der geodätischen Linien einer Rotationsfläche zu erhalten, haben wir nur die gefundenen Werte (28) der Γ^l_{ik} in (21) einzusetzen und zu berücksichtigen, daß $x_1 = r, \quad x_2 = \varphi$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} &= -\frac{f' f''}{1+f'^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{r}{1+f'^2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2, \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= -\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (30)$$

Die zweite dieser Gleichungen läßt sich in einfacher Weise integrieren:

$$\frac{\frac{d^2\varphi}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{ds}} = -\frac{2}{r}\frac{dr}{ds},$$

$$ln\frac{d\varphi}{ds} = ln\,K - 2\,ln\,r$$

oder

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = K,\quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{K}{r^2},\quad K = \text{Integr.-Konst.} \quad . \quad . \quad (31)$$

Auch $\frac{dr}{ds}$ läßt sich leicht gewinnen, wenn wir (24) durch ds^2 dividieren:

$$1 = (1+f'^2)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

und in dieser Gleichung $\frac{d\varphi}{ds}$ durch (31) ausdrücken:

$$(1+f'^2)\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 1 - \frac{K^2}{r^2},$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{r^2 - K^2}{r^2(1+f'^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Durch Division von (32) durch das Quadrat von (31) folgt sodann:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^2(r^2-K^2)}{K^2(1+f'^2)} \text{ oder } \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r}{K}\sqrt{\frac{r^2-K^2}{1+f'^2}} \quad . \quad (33)$$

Die Gleichung der geodätischen Linien selbst in den Koordinaten r und φ ergibt sich daraus durch Integration:

$$\varphi - \varphi_0 = K\int\frac{dr}{r}\sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-K^2}},\quad \varphi_0 = \text{Integr.-Konst.} \quad (34)$$

Wir betrachten wieder die Sonderfälle:

1. Kegel. $f' = k$ (konst.),

$$\varphi - \varphi_0 = \sqrt{1+k^2}\int\frac{d\left(\frac{K}{r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{K}{r}\right)^2}} = \sqrt{1+k^2}\ \arccos\frac{K}{r},$$

$$\frac{K}{r} = \cos\frac{\varphi-\varphi_0}{\sqrt{1+k^2}}$$

oder

$$r = \frac{K}{\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{1+k^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34_1)$$

Um uns ein klares Bild von dem Verlaufe dieser geodätischen Linien zu verschaffen, wollen wir uns die Kegelfläche in die Ebene abgewickelt vorstellen. Jeder auf der Fläche befindlichen Kurve wird dann eine ebene Kurve entsprechen. Wir wollen nun untersuchen, in welche Kurven der Ebene die geodätischen Linien der Kegelfläche übergehen. Als Koordinaten in der Ebene wollen wir Polarkoordinaten mit dem Pol im Kegelscheitel wählen und zwar:

ϱ = Abstand des Kurvenpunktes vom Kegelscheitel,

ψ = Winkel zwischen der Erzeugenden $\varphi = \varphi_0$ und der zum Kurvenpunkte gehörigen Erzeugenden im abgewickelten Zustande.

Es ist dann offenbar im Hinblicke auf Abb. 6:

$$tg\,\chi = f' = k,$$

$$\varrho = \frac{r}{\cos \chi} = r\sqrt{1+k^2}\,,\; r = \frac{\varrho}{\sqrt{1+k^2}} \quad . \quad . \quad (35_1)$$

$$r(\varphi - \varphi_0) = \varrho\,\psi = r\,\psi\sqrt{1+k^2},$$

$$\frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{1+k^2}} = \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35_2)$$

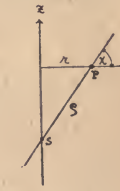


Abb. 6.

Setzen wir nun die beiden Formeln (35) in (34_1) ein, so folgt:

$$\varrho = \frac{K\sqrt{1+k^2}}{\cos \psi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

die bekannte Gleichung einer Geraden in gewöhnlichen Polarkoordinaten. Die Länge des Perpendikels vom Pole beträgt

$$p = \varrho \cos \psi = K\sqrt{1+k^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36')$$

Die Gesamtheit der geodätischen Linien der in die Ebene abwickelbaren Kegelfläche verwandelt sich bei dieser Abwicklung in die Gesamtheit der geodätischen Linien (Geraden) der Ebene. Dieser Satz gilt ganz allgemein für alle Flächen, welche eine Abwickelung ohne Dehnung in die Ebene gestatten; also auch für den im folgenden unter 3. zu besprechenden Zylinder.

2. Ebene. $\quad f' = 0,\; k = 0;$

aus (34_1) folgt: $\quad r = \frac{K}{\cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34_2)$

die Gleichung einer Geradenschar.

3. Zylinder. $f' = \pm\infty$;

aus (33) folgt: $\frac{dr}{d\varphi} = 0,\ r = a$ (konst.).

(31) ergibt sodann $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{K}{a^2}$.

Führen wir nun auf der Zylinderfläche die neuen Koordinaten ein:

$$x = a(\varphi - \varphi_0),$$

z parallel zu den Erzeugenden des Zylinders, so wird

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + dz^2 = dx^2 + dz^2 \quad . \quad . \quad . \quad (37_1)$$

das Bogenelementquadrat der euklidischen Ebene, bezogen auf die rechtwinkligen geradlinigen Koordinaten x und z (Abwicklung der Zylinderfläche in die Ebene) und wir erhalten aus (31) weiter:

$$dx^2 = \frac{K^2}{a^2} ds^2 = \frac{K^2}{a^2}(dx^2 + dz^2),$$

$$dx^2 \left(\frac{a^2}{K^2} - 1\right) = dz^2$$

oder

$$\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{K^2} - 1},$$

woraus

$$z = b \pm x\sqrt{\frac{a^2}{K^2} - 1},\ b = \text{Integr.-Konst.}, \quad . \quad . \quad (37_2)$$

also wieder eine Gesamtheit von Geraden folgt, wenn wir x und z als ebene Koordinaten der abgewickelten Zylinderfläche deuten.

III. Richtungsänderung eines Vektors bei einer Parallelverschiebung, bezogen auf beliebige Gaußsche Koordinaten.

a) Auf einer beliebigen krummen Fläche.

Als Vektor, der parallel verschoben werden soll, wollen wir wieder das Bogenelement $d\mathfrak{s}$ wählen, dessen absoluter Betrag ds durch die bereits bekannte Formel

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + 2 g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2 \quad . \quad . \quad (11)$$

bestimmt wird. Jeder andere Vektor kann durch entsprechende Verlängerung, d. h. Änderung des absoluten Betrages, aus einem geeignet gewählten Bogenelemente $d\mathfrak{s}$ erhalten werden, mit dem er dann die-

selbe Richtung besitzt, so daß er bei einer Parallelverschiebung auch dieselbe Richtungsänderung erleidet wie der infinitesimale Vektor $d\mathfrak{s}$. Die Richtung von ds sei laut nebenstehender Abb. 7 bestimmt durch den Winkel α, welchen es mit der Koordinatenlinie x_1 ($x_2 =$ konst.) bildet. Wir entnehmen aus der Abbildung, die in der Tangentialebene des Punktes P der Fläche zu denken ist:

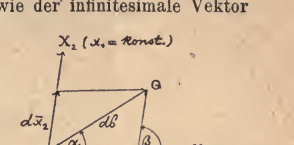


Abb. 7.

$$ds^2 = d\bar{x}_1{}^2 + 2\,d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \cos\beta + d\bar{x}_2{}^2. \quad (38)$$

Durch Vergleich mit (11) ergibt sich:

$$d\bar{x}_1 = dx_1\sqrt{g_{11}},\ d\bar{x}_2 = dx_2\sqrt{g_{22}},\ \cos\beta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}, \quad (39)$$

woraus wir erkennen, daß die Bogenelemente $d\bar{x}_1$, $d\bar{x}_2$ auf Koordinatenlinien im allgemeinen nicht identisch sind mit den Koordinatendifferentialen dx_1, dx_2.

Wenden wir nun auf das infinitesimale Dreieck PRQ den Sinussatz der ebenen Trigonometrie an, so folgt:

$$d\bar{x}_2 : ds = \sin\alpha : \sin\beta$$

und weiter mit Verwendung von (39):

$$\sin\alpha = \frac{d\bar{x}_2 \sin\beta}{ds} = \frac{dx_2\sqrt{g_{22}}}{ds}\sqrt{1 - \frac{g_{12}{}^2}{g_{11}\,g_{22}}}$$

oder im Hinblicke auf (18)

$$\sin\alpha = \frac{dx_2}{ds}\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}. \quad (40)$$

Führen wir jetzt eine infinitesimale Parallelverschiebung aus, so erhalten wir, wenn wir beachten, daß dabei nach (8′) $\delta\,ds = 0$ ist, durch logarithmische Differentiation aus (40):

$$\cot\alpha\,\delta\alpha = \frac{\delta\,dx_2}{dx_2} + \frac{\delta g}{2g} - \frac{\delta g_{11}}{2\,g_{11}}. \quad (41)$$

Für $\frac{\delta\,dx_2}{dx_2}$ haben wir gemäß (15) zu setzen:

$$\frac{\delta\,dx_2}{dx_2} = -(\Gamma^2_{11}\frac{dx_1}{dx_2}\delta x_1 + \Gamma^2_{12}\frac{dx_1}{dx_2}\delta x_2 + \Gamma^2_{12}\delta x_1 + \Gamma^2_{22}\delta x_2); \quad (42)$$

für $\frac{dx_1}{dx_2}$ folgt ferner aus (39) und der Abb. 7:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{d\bar{x}_1}{d\bar{x}_2}\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} =$$

$$= (\sin\beta\cot\alpha - \cos\beta)\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} =$$

$$= \left(\cot\alpha\sqrt{\frac{g}{g_{11}\,g_{22}}} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}\right)\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}$$

oder

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{1}{g_{11}}(\cot\alpha\sqrt{g} - g_{12}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Durch Einsetzen von (43) in (42) und darauf (42) in (41) gelangen wir, wenn wir zugleich δg und δg_{11} entwickeln, weiter zu der folgenden Darstellung:

$$\cot\alpha\,\delta\alpha = -\frac{1}{g_{11}}(\cot\alpha\sqrt{g} - g_{12})(\Gamma^2_{11}\,\delta x_1 + \Gamma^2_{12}\,\delta x_2) -$$

$$-\Gamma^2_{12}\delta x_1 - \Gamma^2_{22}\delta x_2 + \frac{1}{2g}\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}\delta x_2\right) -$$

$$-\frac{1}{2\,g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\delta x_2\right) = -\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\cot\alpha\,(\Gamma^2_{11}\,\delta x_1 +$$

$$+\Gamma^2_{12}\delta x_2) + \left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12} + \frac{1}{2\,g}\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{1}{2\,g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right]\delta x_1 +$$

$$+\left[\frac{g_{12}}{g_{11}}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{22} + \frac{1}{2\,g}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{1}{2\,g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right]\delta x_2.$$

Werden die in den eckigen Klammern auftretenden Γ^2_{ik} entsprechend den Gleichungen (18_1) bis (18_3) ausgedrückt, so zeigt sich, daß die in diesen Klammern stehenden Ausdrücke beide verschwinden, wodurch sich die letzte Relation wesentlich vereinfacht; nach Kürzung durch $\cot\alpha$ ergibt sich somit:

$$\delta\alpha = -\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}(\Gamma^2_{11}\,\delta x_1 + \Gamma^2_{12}\,\delta x_2) \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Dabei bedeutet α den Winkel $(d\bar{s},\ dx_1)$. Dieser Winkel also bleibt bei einer Parallelverschiebung nicht unveränderlich, es sei denn, daß wir geodätische Koordinaten verwenden, für welche die $\Gamma^l_{ik} = 0$ sind.

Wir wollen noch die Frage beantworten, was für eine Richtungsänderung bei einer Parallelverschiebung von endlichem Betrage eintritt. Da eine solche Parallelverschiebung als das Ergebnis einer stetigen Folge unendlich vieler infinitesimaler Parallelver-

schiebungen aufzufassen ist, so finden wir den zugehörigen Betrag der Richtungsänderung durch Integration von (44) entlang jenes Weges, auf welchem die endliche Parallelverschiebung stattfindet. Sei

$$x_2 = x_2(x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

die Gleichung dieses Weges auf der Fläche; dann haben wir in (44) δx_2 auszudrücken durch:

$$\delta x_2 = \frac{dx_2}{dx_1}\,\delta x_1$$

und erhalten so, wenn der Anfangspunkt des Weges die Koordinaten $x_1^0, x_2^0 = x_2(x_1^0)$, der Endpunkt die Koordinaten $x_1^*, x_2^* = x_2(x_1^*)$ hat, die bei der Parallelverschiebung erfolgte Richtungsänderung vom Anfangswerte α^0 zum Endwerte α^* durch die Formel:

$$\alpha^* - \alpha^0 = \int_{x_1^*}^{x_1^0} \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \left(\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12} \frac{dx_2}{dx_1} \right) \delta x_1 . \quad . \quad . \quad (46)$$

b) Auf einer Rotationsfläche.

Wir wollen nunmehr die eben gefundenen Formeln (44) und (46) wieder auf die besondere Klasse der Rotationsflächen anwenden und haben zu diesem Zwecke für g_{11} und g, Γ^2_{11} und Γ^2_{12} die entsprechenden Werte aus den Formeln (25), (26) und (28) zu entnehmen, indem wir wie früher $x_1 = r$ und $x_2 = \varphi$ setzen. Wir erhalten so aus (44)

$$\delta\alpha = -\frac{r\sqrt{1+f'^2}}{1+f'^2}\frac{\delta\varphi}{r} = -\frac{\delta\varphi}{\sqrt{1+f'^2}}, \quad (47)$$

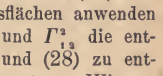


Abb. 8.

wobei α den Winkel des Vektors $d\mathfrak{s}$ mit der Meridiankurve bedeutet (s. Abb. 8). Aus (46) folgt ebenso:

$$\alpha^* - \alpha^0 = \int_{r^*}^{r^0} \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{d\varphi}{dr}\,\delta r = \int_{\varphi^*}^{\varphi^0} \frac{\delta\varphi}{\sqrt{1+f'^2}}, \quad . \quad (48)$$

wenn wir uns im letzten Integral den Integrationsweg durch die Gleichung

$$r = r(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

gegeben denken.

Sonderfälle.

1. Kegel. $f' = tg\,\chi = \cot\vartheta = \text{konst.}$,

wenn wir unter ϑ den halben Öffnungswinkel des Kegels verstehen. Daraus folgt:

$$1 + f'^2 = 1 + \cot^2 \vartheta = \frac{1}{\sin^2 \vartheta};$$

somit

$$\delta\alpha = -\sin\vartheta\, \delta\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47_1)$$

und

$$\alpha^* - \alpha^0 = \sin\vartheta \int_{\varphi^*}^{\varphi^0} \delta\varphi = (\varphi^0 - \varphi^*) \sin\vartheta. \quad \ldots \quad (48_1)$$

Da in das Integral (48_1) die Gleichung (49) des Integrationsweges nicht eingeht, ist auf der Kegelfläche die Richtungsänderung eines Vektors bei Parallelverschiebung unabhängig vom Wege, auf welchem diese Verschiebung stattfindet. Bei einem vollen Umlauf $\varphi^* - \varphi^0 = 2\pi$ im positiven Sinne beträgt sie:

$$\Delta\alpha = -2\pi \sin\vartheta. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48'_1)$$

Setzen wir in den letzten Formeln $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir die entsprechenden Ausdrücke für die

2. Ebene. $f' = 0,$

$$\delta\alpha = -\delta\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47_2)$$

$$\alpha^* - \alpha^0 = -(\varphi^* - \varphi^0) \quad \ldots\ldots \quad (48_2)$$

und für einen vollen Umlauf $\varphi^* - \varphi^0 = 2\pi$:

$$\Delta\alpha = -2\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48'_2)$$

in Übereinstimmung mit den Formeln (2) und (2′).

3. Zylinder. $f' = \pm\infty,$

$$\delta\alpha = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47_3)$$

$$\alpha^* = \alpha^0 \text{ (konst.)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48_3)$$

r und φ sind, wie schon früher erwähnt, auf der Zylinderfläche geodätische Koordinaten, daher keine Richtungsänderung.

4. Kugel. Wie unter II. 4. gezeigt wurde, gilt für die Kugel

$$1 + f'^2 = \frac{R^2}{R^2 - r^2};$$

somit folgt aus (47)

$$\delta\alpha = -\frac{\delta\varphi}{R}\sqrt{R^2 - r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47_4)$$

und aus (48)

$$\alpha^* - \alpha^0 = \frac{1}{R} \int_{r^*}^{r^0} \sqrt{R^2 - r^2}\, \frac{d\varphi}{dr}\, \delta r, \quad \ldots \quad (48_4)$$

wobei φ als Funktion von r (Integrationsweg) bekannt sein muß. (47_4) und (48_4) lassen sich bei Einführung der geographischen Breite β durch die Gleichung

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \quad \ldots \quad (50)$$

auch in der Form schreiben:

$$\delta\alpha = -\sin\beta\, \delta\varphi, \quad \ldots \quad (47'_4)$$

$$\alpha^* - \alpha^0 = \int_{\varphi^*}^{\varphi^0} \sin\beta\, \delta\varphi, \quad \ldots \quad (48'_4)$$

wobei wir uns den Integrationsweg durch eine Beziehung von der Form

$$\beta = \beta(\varphi)$$

gegeben vorstellen.

Zur besseren Veranschaulichung wollen wir einen besonderen Fall betrachten. Wir führen die Parallelverschiebung entlang eines geschlossenen Weges aus, der sich aus den folgenden 4 Teilen zusammensetzt (siehe Abbildung 9):

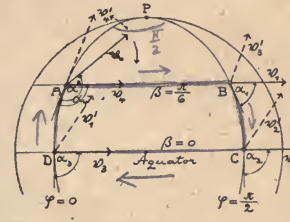


Abb. 9.

a) $\beta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$ (obere Halbkugel), $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$,

b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} \geqq \beta \geqq 0$,

c) $\beta = 0$, $\frac{\pi}{2} \geqq \varphi \geqq 0$,

d) $\varphi = 0$, $0 \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{6}$,

und fragen uns: Welche Endstellung nimmt ein Vektor $\mathfrak{v}$ an, der zu Anfang $\left(\varphi = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2}\right)$ die Richtung $\alpha^0 = 135^0 = \frac{3\pi}{4}$ hatte? α bedeutet gemäß Definition unter III. *a)* den Winkel zwischen der

Richtung des Vektors $\mathfrak{v}$ und der Richtung der wachsenden $x_1 = r\,(dx_1 = dr$ positiv!) Unter Beachtung dieses Umstandes schließen wir an der Hand der Abb. 9:

Auf dem Wege *a)* $(\overrightarrow{AB})$ ist zufolge $(48'_4)$ $\alpha_1 - \alpha^0 = \frac{1}{2}\left(0 - -\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, mithin $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, d. h. $\mathfrak{v}$ berührt den Parallelkreis.

Entlang *b)* $(\overrightarrow{BC})$ ist $\delta\varphi = 0$, sohin nach $(47'_4)$ auch $\delta\alpha = 0$ und folglich $\alpha_2 = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. BC ist als Stück eines Großkreises (Meridians) eine geodätische Linie.

Entlang *c)* $(\overrightarrow{CD})$ ist $\beta = 0$ (Äquator) und zufolge $(48'_4)$, da das Integral verschwindet, $\alpha_3 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Auch der Äquator ist eine geodätische Linie.

Auf dem Wege *d)* $(\overrightarrow{DA})$ ist wieder $\delta\varphi = 0$, also erleidet der Vektor $\mathfrak{v}$ gemäß $(47'_4)$ abermals keine Richtungsänderung: $\alpha_4 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$. DA ist als Meridian gleichfalls eine geodätische Linie.

Nach Zurücklegung des gesamten Weges $ABCDA$ hat somit der Vektor $\mathfrak{v}$ eine Richtungsänderung um $\frac{\pi}{4}$ (45^0) im negativen Drehungssinne erfahren. Es ist klar, daß bei Fortsetzung dieses Vorganges dieses Spiel sich wiederholt und daß daher nach 8maliger Durchlaufung des Weges $ABCDA$ im angegebenen Sinne der Vektor $\mathfrak{v}$ um den Punkt A eine volle Umdrehung im negativen Sinne (Uhrzeigersinne) ausgeführt haben wird.

Durchlaufen wir denselben Weg im umgekehrten Sinne: $ADCBA$ und gehen wir von der gleichen Anfangsstellung des Vektors $\mathfrak{v}$ $\alpha^0 = \frac{3\pi}{4}$ aus, so ist leicht zu sehen, daß auf dem Wegstück $ADCB$ keine Richtungsänderung eintritt (lauter geodätische Linien!), daß aber auf dem Wege $\overrightarrow{BA}$ eine solche im Betrage

$$\int_0^{\pi/2} \sin\frac{\pi}{6}\,\delta\varphi = +\frac{\pi}{4}$$

gemäß $(48'_4)$ erfolgt, so daß der Vektor $\mathfrak{v}$, in den Punkt A zurückgekehrt, in den Meridian zu liegen kommt. Siehe hiezu die ge-

strichelten Vektoren in Abb. 9. Nach 8maliger Durchlaufung des Weges *ADCBA* wird der Vektor $\mathfrak{v}$ somit eine volle Umdrehung, diesmal aber im positiven Sinne ausgeführt haben.

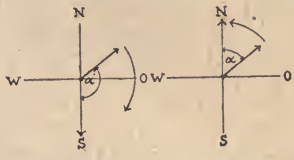
Untersuchen wir die Richtungsänderung bei Parallelverschiebung entlang eines ganzen Parallelkreises

$$\beta = \text{konst.}, \quad \varphi^* - \varphi^0 = 2\pi,$$

so erhalten wir aus $(48'_4)$ hiefür den Wert

$$\Delta\alpha = \alpha^* - \alpha^0 = -2\pi \sin\beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Es ist nun bemerkenswert und für das Wesen der Parallelverschiebung von Wichtigkeit, daß der Formel (51) eine besondere physikalische Bedeutung zukommt Sie ist nämlich der Ausdruck für den Betrag der Drehung, welche die Schwingungsebene eines Pendels in der geogr. Breite β während eines Tages ausführt (Fou-



Nördliche Halbkugel. Südliche

Abb. 10.

cault'scher Pendelversuch). Die häufig ohne ausreichende Erklärung angewandte Redensart, daß sich bei der Erdrotation die Schwingungsebene eines Pendels parallel verschiebe, findet also erst in den obigen Ausführungen ihre mathematische Begründung. Wie Abb. 10 erläutert, erfolgt dabei, entsprechend dem Vorzeichen von (51), die Drehung auf der nördlichen Halbkugel im negativen Sinne (Uhrzeigersinne) — Richtung der wachsenden r nach Süden! — auf der südlichen Halbkugel dagegen im positiven Drehungssinne (entgegen dem Uhrzeiger) — Richtung der wachsenden r nach Norden!

Wir gewinnen aus dieser Anwendung die bedeutsame Erkenntnis, daß die von uns unter I. *b)* gewählte Definition der Parallelverschiebung eines Vektors auf einer krummen Fläche, die bisher nur einen rein geometrischen Charakter trug, auch durch physikalische Vorgänge realisiert erscheint. Diese Beobachtung bezieht sich hier auf das Gebiet der klassischen Physik; die grundlegende Bedeutung der Parallelverschiebung für die relativistische Physik wird erst im zweiten Teile dieses Buches klar werden.

IV. Unter welcher Bedingung erreicht ein Vektor bei Parallelverschiebung dieselbe Endstellung unabhängig vom gewählten Wege?

Wir haben im vorhergehenden Abschnitte gesehen, daß die auf krummlinige Koordinaten bezogene Richtungsänderung eines Vektors bei Parallelverschiebung im Falle eines Kegels, einer Ebene und eines Zylinders unabhängig von dem Wege erfolgt, auf welchem wir den Vektor von einem bestimmten Anfangspunkte zu einem bestimmten Endpunkte verschieben.[1]) Ein anderes Verhalten zeigte das Beispiel der Kugel. Wir betrachten nochmals die Abb. 9. Begeben wir uns auf dem Parallelkreise von A nach B, so erfährt ein Vektor eine Drehung um $\frac{\pi}{4}$ im negativen Sinne, durchlaufen wir dagegen den Weg $ADCB$, so tritt, wie wir gesehen haben, überhaupt keine Richtungsänderung ein, der Vektor hat im Punkte B dieselbe Stellung wie in A. Die Richtungsänderung und damit die Endstellung des parallel verschobenen Vektors erscheint somit in diesem Falle abhängig von dem Wege, den wir von A nach B wählen.

Dieser Sachverhalt legt die Frage nahe, unter welcher Bedingung es möglich sei, einen Vektor von einem bestimmten Anfangspunkte zu einem bestimmten Endpunkte derart parallel zu verschieben, daß die in Bezug auf ein beliebiges System krummliniger Koordinaten eintretende Richtungsänderung und die hiedurch bedingte Endstellung des Vektors unabhängig sei von dem gewählten Wege der Verschiebung. Wir können schon an dieser Stelle vermuten, daß dieses Verhalten wesentlich mit den geometrischen Eigenschaften der Fläche zusammenhängen wird, auf welcher wir die Parallelverschiebung vornehmen. Es sei hier gleich hervorgehoben, daß Kegel und Zylinder der Ebene insoferne sehr nahe stehen, als sie sich in dieselbe abwickeln lassen, was bei der Kugel bekanntlich nicht der Fall ist. Auf der Kugel herrscht daher eine wesentlich andere Geometrie als in der Ebene.

Wir stellen also die etwas strenger gefaßte Frage: Was für eine geometrische Bedingung muß erfüllt sein, damit die Endlage eines Vektors bei einer endlichen Parallelverschiebung unabhängig sei von dem hiebei gewählten Wege? Wir greifen auf die für eine infinitesimale Parallelverschiebung grundlegenden Formeln (15) zurück und vergegenwärtigen uns, daß eine Parallelverschiebung von endlichem Betrage mit einer Änderung der Vektorkomponenten dx_1 und dx_2 verbunden sein muß, deren Größe und Vorzeichen durch

[1]) Der Vektor erreicht damit auch immer dieselbe Endstellung.

$$\left.\begin{aligned} \Delta\, dx_1 &= -\int_{A(x_1^0,\,x_2^0)}^{B(x_1^*,\,x_2^*)} [(\Gamma^1_{11}\, dx_1 + \Gamma^1_{12}\, dx_2)\,\delta x_1 + (\Gamma^1_{12}\, dx_1 + \\ &\qquad + \Gamma^1_{22}\, dx_2)\,\delta x_2], \\ \Delta\, dx_2 &= -\int_{A(x_1^0,\,x_2^0)}^{B(x_1^*,\,x_2^*)} [(\Gamma^2_{11}\, dx_1 + \Gamma^2_{12}\, dx_2)\,\delta x_1 + (\Gamma^2_{12}\, dx_1 + \\ &\qquad + \Gamma^2_{22}\, dx_2)\,\delta x_2] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (52)$$

gegeben ist. Dabei sind die rechts stehenden Integrale als Kurvenintegrale in Bezug auf die Differentiale dx_1 und dx_2 aufzufassen, zu deren Auswertung wir die Gleichung des Integrationsweges

$$x_2 = x_2(x_1) \quad \text{oder} \quad x_1 = x_1(x_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

kennen müssen.

Soll nun die Endstellung des Vektors im Punkte B unabhängig sein von dem Wege (45), der von A nach B führt, so müssen die in eckigen Klammern stehenden Integranden totale Differentiale sein, d. h. es muß Funktionen

$$dx_1 = F_1(x_1,\, x_2) \quad \text{und} \quad dx_2 = F_2(x_1,\, x_2)$$

geben, so daß für $i = 1, 2$

$$\Delta\, dx_i = \int_{A(x_1^0,\,x_2^0)}^{B(x_1^*,\,x_2^*)} \delta F_i(x_1, x_2) = F_i(x_1^*, x_2^*) - F_i(x_1^0, x_2^0), \qquad (53)$$

also das totale Differential

$$\delta F_i(x_1, x_2) = -(\Gamma^i_{11}\, dx_1 + \Gamma^i_{12}\, dx_2)\,\delta x_1 - (\Gamma^i_{12}\, dx_1 + \\ + \Gamma^i_{22}\, dx_2)\,\delta x_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

wird. Damit dies der Fall sei, ist aber notwendig und hinreichend, daß für $i = 1, 2$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

werde. Nun ist zufolge (54) für $i = 1, 2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial\, dx_i}{\partial x_1} = -\Gamma^i_{11}\, dx_1 - \Gamma^i_{12}\, dx_2, \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_2} &= \frac{\partial\, dx_i}{\partial x_2} = -\Gamma^i_{12}\, dx_1 - \Gamma^i_{22}\, dx_2, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

woraus weiter

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right) = -\frac{\partial \Gamma^i_{11}}{\partial x_2}\, dx_1 - \frac{\partial \Gamma^i_{12}}{\partial x_2}\, dx_2 - \Gamma^i_{11}\frac{\partial\, dx_1}{\partial x_2} - \Gamma^i_{12}\frac{\partial\, dx_2}{\partial x_2}$$

und durch Substitution der Werte (56) für $\frac{\partial dx_1}{\partial x_2}$ und $\frac{\partial dx_2}{\partial x_2}$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right) = \left(-\frac{\partial \Gamma^i_{11}}{\partial x_2} + \Gamma^i_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^i_{12}\Gamma^2_{12}\right) dx_1 + \left(-\frac{\partial \Gamma^i_{12}}{\partial x_2} + \Gamma^i_{11}\Gamma^1_{22} + \Gamma^i_{12}\Gamma^2_{22}\right) dx_2 \quad . \quad . \quad . \quad (57_1)$$

und mit Vertauschung der Indizes 1 und 2 und Berücksichtigung von $\Gamma^i_{12} = \Gamma^i_{21}$ analog

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right) = \left(-\frac{\partial \Gamma^i_{12}}{\partial x_1} + \Gamma^i_{22}\Gamma^2_{11} + \Gamma^i_{12}\Gamma^1_{11}\right) dx_1 + \left(-\frac{\partial \Gamma^i_{22}}{\partial x_1} + \Gamma^i_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^i_{12}\Gamma^1_{12}\right) dx_2 \quad . \quad . \quad . \quad (57_2)$$

folgt. Aus den Formeln (55) und (57) ergeben sich sonach die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right) = {} & \left[\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x_1} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + \right.\\ & + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} - (\Gamma^2_{12})^2\Big] dx_1 + \left[\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x_2} - \right.\\ & \left. - \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x_1} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}\right] dx_2 = 0,\end{aligned}\right\} \quad (58_1)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) = {} & \left[\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x_2} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \right.\\ & \left. - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}\right] dx_1 + \left[\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x_2} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} + \right.\\ & \left. + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} - (\Gamma^1_{12})^2\right] dx_2 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (58_2)$$

Diese Gleichungen müssen identisch erfüllt sein für jedes beliebige Bogenelement $d\mathfrak{s}(dx_1, dx_2)$, wenn die Endlage eines Vektors in jedem Falle vom Wege der Parallelverschiebung unabhängig sein soll. Dies ist aber nur so möglich, daß die in den Gleichungen (58) auftretenden Koeffizienten von dx_1 und dx_2 für sich selbst identisch verschwinden:

$$\left.\begin{aligned}R_{11} = {} & \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x_1} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{11} - \\ & - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} - (\Gamma^2_{12})^2 = 0,\\ R_{12} = {} & \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x_1} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} = 0,\end{aligned}\right\} \quad (59)$$

$$\left.\begin{aligned} R_{21} &= \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x_2} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = 0, \\ R_{22} &= \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial x_2} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{22} - \\ &\qquad - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} - (\Gamma^1_{12})^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Durch eine längere Rechnung, bei der man sich der Formeln (18_1) bis (18_3) zu bedienen hat und die hier nicht vorgeführt werden soll, zumal sie durch einen später unter B. III. (S. 47 f.) für einen allgemeineren Fall gegebenen Beweis überflüssig wird, läßt sich nachweisen, daß die Größen R_{ik} die Symmetriebedingung

$$R_{21} = R_{12} \qquad (R_{ki} = R_{ik}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

erfüllen. Die Koeffizienten R_{ik} bilden somit gleichwie die Größen g_{ik} die Komponenten eines symmetrischen Tensors 2. Stufe, welcher den Namen Krümmungstensor führt.

Die Gleichungen (59) enthalten die Antwort auf die in der Überschrift dieses Abschnittes gestellte Frage. Damit die Endstellung eines Vektors bei einer Parallelverschiebung unabhängig von dem gewählten Wege sei, müssen notwendig sämtliche Komponenten des Krümmungstensors R_{ik} identisch verschwinden. Diese Bedingung ist übrigens auch hinreichend, da aus dem Verschwinden der R_{ik} gemäß (58) sofort das Erfülltsein der Gleichungen (55) und damit auch der Gleichungen (54) und (53) folgt.

Die Gleichungen (59) sind sicherlich dann erfüllt, wenn sämtliche Symbole Γ^l_{ik} identisch Null sind. Dies tritt zufolge (18_1) bis (18_3) offenbar ein, wenn sämtliche g_{ik} konstante Werte haben, da die Γ^l_{ik} im wesentlichen von den ersten Ableitungen der g_{ik} abhängen und mit diesen zugleich verschwinden. Es trifft dies, wie bekannt, für die euklidische Ebene zu, wo das Bogenelement (11) in recht- und schiefwinkligen geradlinigen Koordinaten konstante Koeffizienten besitzt aber auch für jede krumme Fläche, auf welcher sich Koordinaten derart wählen lassen, daß (11) konstante Koeffizienten erhält. Dies ist z. B. beim Zylinder der Fall, dessen Bogenelement in den Koordinaten $x = a(\varphi - \varphi_0)$ und z gemäß (37_1) die geforderte Eigenschaft aufweist; ebenso aber auch für die Kegelfläche, wenn wir statt r und φ die neuen Koordinaten einführen:

$$x = r\sqrt{1+k^2}\cos\frac{\varphi}{\sqrt{1+k^2}},\ y = r\sqrt{1+k^2}\sin\frac{\varphi}{\sqrt{1+k^2}}. \quad (61)$$

Das Bogenelementquadrat (24) für $f' = k$ (konst.)

$$ds^2 = \sqrt{1+k^2}\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2$$

geht dann, wie man leicht nachrechnet, über in die Form des Bogenelementquadrates der Ebene in den rechtwinkligen Koordinaten x, y:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

V. Der Krümmungstensor einer Rotationsfläche und sein Zusammenhang mit dem Gaußschen Krümmungsmaß.

Für den Sonderfall einer allgemeinen Rotationsfläche nehmen die Komponenten R_{ik} des Krümmungstensors (59) im Hinblicke auf die Formeln (28) und unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$ zu setzen ist, die Werte an:

$$\left.\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{r^2} + \frac{f' f''}{r(1+f'^2)} - \frac{1}{r^2} = \frac{f' f''}{r(1+f'^2)}, \\ R_{12} &= R_{21} = 0, \\ R_{22} &= -\frac{1}{1+f'^2} + \frac{2 r f' f''}{(1+f'^2)^2} - \frac{r f' f''}{(1+f'^2)^2} + \frac{1}{1+f'^2} = \\ &= \frac{r f' f''}{(1+f'^2)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Der Krümmungstensor verschwindet also im allgemeinen nicht für eine beliebige Rotationsfläche. Es tritt dies nur dann ein, wenn $f'' = 0$ und dabei insbesondere

1. $f' = k$ (konst.) ist, d. h. für eine Kegelfläche;
2. $f' = 0$ ist, d. h. für die Ebene;
3. $f' = \pm\infty$ ist, d. h. für eine Zylinderfläche. In diesen drei Fällen ist mithin die Endlage eines Vektors bei Parallelverschiebung unabhängig von dem hiebei gewählten Wege, wie wir in anderer Weise schon am Schlusse des vorhergehenden Abschnittes gesehen haben.

Als Beispiel einer Fläche mit nicht verschwindendem Krümmungstensor sei die Kugel betrachtet. Mit Rücksicht auf die Formeln des Abschnittes II. (Sonderfall 4, Kugel, S. 17) erhalten wir aus (62):

$$R_{11} = \frac{1}{R^2 - r^2}, \quad R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{22} = \frac{r^2}{R^2}. \quad (62')$$

Wir wenden uns nunmehr zu der Frage nach dem Zusammenhange, in welchem der Krümmungstensor (62) mit dem Gaußschen Krümmungmaße K einer Rotationsfläche steht. Dieses ist bekanntlich ganz allgemein definiert durch den reziproken Wert des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2:

$$K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}. \quad (63)$$

ϱ_1 und ϱ_2, die Extremwerte unter den Krümmungsradien sämtlicher Normalschnitte der Fläche, liegen naturgemäß in derselben Flächen-

normalen und im Falle einer Rotationsfläche ist insbesondere der eine Hauptkrümmungsradius ϱ_1 identisch mit dem Krümmungsradius der Meridiankurve $z = f(r)$

$$\varrho_1 = \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''}, \quad \ldots \quad (64)$$

der andere ϱ_2 gleich dem Krümmungsradius des zur Meridianebene senkrechten Normalschnittes der Fläche (siehe Abb. 11). Zu seiner genaueren Bestimmung bedienen wir uns des Satzes von Meusnier. Dieser besagt:

Legt man durch eine Flächentangente zwei Ebenen, von denen die eine zur Tangentialebene normal steht, die andere mit ihr den Winkel χ bildet, so sind die beiden zugehörigen Krümmungsradien ϱ und ϱ' durch die Gleichung verknüpft:

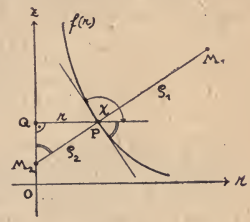


Abb. 11.

$$\varrho' = \varrho \sin \chi. \quad \ldots \quad (65)$$

Indem wir im vorliegenden Falle die Parallelkreistangente in P (Abb. 11) — normal zur Zeichenebene — als Flächentangente wählen, stellt die ϱ_2 enthaltende Ebene die zur Tangentialebene in P normale Schnittebene dar, während die Parallelkreisebene mit ihr den Winkel χ bildet. Für die zugehörigen Krümmungsradien, $\varrho_2 = \varrho$ und den Parallelkreisradius $r = \varrho'$, besteht somit zufolge (65) und im Hinblicke auf Abb. 11 die Beziehung:

$$r = \varrho_2 \sin \chi. \quad \ldots \quad (65')$$

Nun ist $tg\,\chi = f'$ und es folgt daher weiter

$$\varrho_2 = r\sqrt{1 + \cot^2 \chi} = \frac{r\sqrt{1 + f'^2}}{f'}. \quad \ldots \quad (65'')$$

Das Gaußsche Krümmungsmaß wird mithin gemäß (63), (64) und (65″):

$$K = \frac{f' f''}{r(1 + f'^2)^2}. \quad \ldots \quad (66)$$

Angewandt auf die Sonderfälle: Kegel, Ebene und Zylinder, für welche übereinstimmend $f'' = 0$ ist, ergibt (66):

$$K = 0. \quad \ldots \quad (66')$$

Für die Kugel folgt mit Beachtung von (62′)

$$K = \frac{1}{R^2}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (66'')$$

sie ist eine Fläche konstanter (positiver) Krümmung.

Führen wir gemäß (66) das Krümmungsmaß K in die Formeln (62) ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf (25):

$$\left.\begin{aligned} R_{11} &= K(1 + f'^2) = Kg_{11} \\ R_{12} &= R_{21} = K.0 = Kg_{12} = Kg_{21} \\ R_{22} &= Kr^2 = Kg_{22} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (67)$$

Die Komponenten R_{ik} des Krümmungstensors einer Rotationsfläche erscheinen somit den Komponenten g_{ik} des metrischen Fundamentaltensors proportional und der dabei auftretende Proportionalitätsfaktor ist das Gaußsche Krümmungsmaß K.

B. Physikalischer Teil.

I. Die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt.

Jeder physikalische Vorgang wird dargestellt durch ein Ereignis oder eine Kette von Ereignissen. Jedes Ereignis aber ist gekennzeichnet durch Ort und Zeit seines Geschehens. Dabei soll unter Ereignis genauer ein Punktereignis verstanden sein, dessen Ort durch einen Punkt unseres dreidimensionalen Beobachtungsraumes, dessen Zeit durch einen Punkt der eindimensionalen Mannigfaltigkeit „Zeit" — durch einen Zeitpunkt — festgelegt erscheint. Ein Raumpunkt wird geometrisch und physikalisch gegeben durch drei Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3, ein Zeitpunkt durch die eine Zeitkoordinate $x_0 = t$. Ein Punktereignis wird somit bestimmt sein durch Angabe seiner vier Raum-Zeitkoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3, wobei die Sonderstellung der Zeit durch den Index 0 angedeutet sein soll. Da nun jeder physikalische Vorgang sich aus Punktereignissen zusammensetzt, so muß zur Darstellung der gesamten Physik ein vierdimensionales Koordinatensystem ausreichen, das aus den drei Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und der einen Zeitkoordinate x_0 besteht.

Der wesentlich neue Gedanke, welcher die Gravitationstheorie Einsteins von der klassischen Physik unterscheidet, ist nun der, daß Raum und Zeit, die von uns zwar als wesensverschieden empfunden werden, niemals aber tatsächlich voneinander unabhängig existieren, sondern von uns als voneinander unabhängig existierend gedacht wurden, daß Raum und Zeit eine Einheit in dem Sinne bilden, daß die Zeit als gleichwertiger Bestandteil der „Welt" neben den Raum tritt. Was versteht nun Einstein unter dieser „Welt" und wie kommt in ihr die Gleichwertigkeit von Raum und Zeit zum Ausdruck?

Da die exakte Erfassung physikalischer Vorgänge auf mathematischem Wege erfolgt, so muß diese Gleichwertigkeit in der

mathematischen Form der physikalischen Gesetze zutage treten. Zu einer solchen Darstellung gelangte Einstein, indem er, eine Idee Hermann Minkowskis ausbauend, die herkömmliche Betrachtungsweise, welche den zeitlichen Verlauf der Ereignisse in einem für sich allein existierenden dreidimensionalen Raume verfolgt, durch eine neue ersetzte, die einen für sich allein vorhandenen Raum nicht kennt, sondern nur eine vierdimensionale Einheit, die Raum-Zeit-Welt oder kurz die „Welt".

Wir dürfen mit dieser vierdimensionalen Mannigfaltigkeit „Welt" keine übersinnlichen Begriffe verbinden, sondern müssen sie für das nehmen, was sie wirklich ist, ein rein mathematisches Gebilde. Die besondere mathematisch-geometrische Natur, die wir ihr mit Einstein zuschreiben, soll dabei den Verhältnissen der zweidimensionalen Flächengeometrie, welche wir im ersten Teile dieser Schrift behandelt haben, nachgebildet sein. Wir werden daher gewisse Begriffe, die ihren Wortsinn nur in der Geometrie der Flächen und des gewöhnlichen Raumes haben, unmittelbar und ohne Bedenken mit sinngemäßer Übertragung ihres logischen Inhaltes auf die vierdimensionale „Welt" anwenden, indem wir meinen, daß sie dort nur Größen analoger Bedeutung und mathematischer Bauart bezeichnen. Diese vierdimensionale „Welt" Einsteins ist also eine rein mathematische Konstruktion, sie ist gewissermaßen ein riesiger Katalog, in dem alle Ereignisse des Weltgeschehens aufgezeichnet erscheinen. Wir dürfen an sie nicht die Forderung sinnlicher Vorstellbarkeit richten, es muß uns genügen, ein verläßliches Verfahren zu kennen, in dem Kataloge zu lesen und so die wirklichen Geschehnisse aus ihren Katalogzeichen feststellen zu können. Diese Katalogzeichen aber sind dem Bereiche einer auf vier Dimensionen verallgemeinerten Geometrie entnommen. Wir betrachten zur Erläuterung gleich ein grundlegendes Beispiel.

Wie erscheint in der vierdimensionalen „Welt" ein physikalischer Einzelvorgang von endlicher Dauer dargestellt? Da jeder einzelnen Phase ein Weltpunkt mit den Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 entspricht, wird das Bild des Gesamtvorganges eine kontinuierliche Reihe solcher Weltpunkte sein, die wir zweckmäßig eine Weltlinie nennen werden. Jede solche Weltlinie bedeutet für die vierdimensionale Welt dasselbe, was wir im Zwei- und Dreidimensionalen eine Flächen-, bzw. Raumkurve zu nennen gewohnt sind. Indem wir an der geometrischen Nomenklatur festhalten, schreiben wir genau wie jeder gewöhnlichen Kurve auch der Weltlinie ein Bogenelement ds zu, dessen Quadrat wir aus den Koordinatendifferentialen dx_0, dx_1, dx_2, dx_3 nach dem Vorbilde (11) als quadratische Form mit von Weltpunkt zu Weltpunkt veränderlichen Koeffizienten g_{ik} aufbauen:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{00}\,dx_0^2 + 2\,g_{01}\,dx_0\,dx_1 + 2\,g_{02}\,dx_0\,dx_2 + \\ & + 2\,g_{03}\,dx_0\,dx_3 + g_{11}\,dx_1^2 + \\ & + 2\,g_{12}\,dx_1\,dx_2 + 2\,g_{13}\,dx_1\,dx_3 + \\ & + g_{22}\,dx_2^2 + 2\,g_{23}\,dx_2\,dx_3 + \\ & + g_{33}\,dx_3^2, \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

wofür wir wie früher — siehe die Formel (11′) — mit Weglassung des Summenzeichens kurz schreiben wollen:

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68')$$

mit dem einzigen Unterschiede, daß jetzt vereinbarungsgemäß über in demselben Term zweimal auftretende Indizes stets von 0 bis 3 summiert werden soll. Die Größen g_{ik} bilden den metrischen Fundamentaltensor der „Welt", welcher $4^2 = 16$ Komponenten besitzt, von denen jedoch wegen der Symmetrieeigenschaft

$$g_{ik} = g_{ki}$$

12 paarweise gleich sind. Er umfaßt also im allgemeinen 10 verschiedene Komponenten.

Der Ansatz (68) entspricht vollständig der von uns im Sinne Einsteins getroffenen Annahme, daß Raum und Zeit ein unauflösliches Ganzes bilden sollen, in dem keine der vier Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 vor den anderen bevorzugt ist. In der quadratischen Form (68) sind alle Koordinatendifferentiale gleichberechtigt.

Befindet sich ein beweglich gedachter Punkt in bezug auf das gewählte Koordinatensystem in Ruhe, ist also

$$dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0,$$

so folgt aus (68)

$$ds = dx_0 \sqrt{g_{00}},$$

d. h. das Bogenelement ds ist an dem Punktorte proportional dem verstrichenen Zeitintervall dx_0. Ist dagegen der Punkt in Bewegung, sind also dx_1, dx_2, dx_3 bestimmte Funktionen von dx_0, welche an der betrachteten Stelle nicht verschwinden, so ist ds, abgesehen von der Zeit dx_0, auch noch abhängig von der dem Beweglichen eigenen Geschwindigkeit, welche durch die zu dx_0 gehörigen Werte von dx_1, dx_2, dx_3 gemessen wird, und wir nennen deshalb ds die Eigenzeit des bewegten Punktes.

Die Gestalt des Bogenelementes (68) wurde von Bernhard Riemann seinem Entwurfe einer Geometrie beliebig vieler Dimen-

sionen zugrunde gelegt und besitzt die schon in der Einleitung hervorgehobene Eigenschaft, unbestimmte Koeffizienten g_{ik} zu enthalten, die im Sinne der Gravitationstheorie Einsteins als Funktionen der Materie zu bestimmen sein werden.

In ähnlicher Weise, wie wir eben durch Verallgemeinerung von (11) das vierdimensionale Bogenelement (68) erhielten, müssen wir nun darangehen, auch die übrigen geometrischen Größen des ersten Teiles dieser Ausführungen auf vier Dimensionen zu verallgemeinern, um sie der Gravitationstheorie dienstbar zu machen.

II. Verallgemeinerung der Parallelverschiebung und der geodätischen Linie sowie deren physikalische Bedeutung in der Gravitationstheorie.

Ebenso wie aus (11) mit Beibehaltung der wesentlichen Merkmale — des Charakters einer quadratischen Differentialform — die allgemeinere Formel (68) gewonnen wurde, gelingt es leicht, aus den die infinitesimale Parallelverschiebung in beliebigen krummlinigen Koordinaten darstellenden Formeln (15) mit Wahrung ihrer bilinearen Gestalt in bezug auf die Komponenten dx_i des infinitesimalen Vektors $d\mathfrak{s}$ und δx_i der infinitesimalen Verschiebung $\delta\mathfrak{s}$ auf 4 Koordinaten erweiterte Relationen abzuleiten. Wir können sie wegen ihrer klaren und eindeutigen Form ohne Mühe und ohne Bedenken hinschreiben:

$$\begin{aligned}\delta dx_0 = -(&\Gamma^0_{00}\,dx_0\,\delta x_0 + \Gamma^0_{01}\,dx_0\,\delta x_1 + \Gamma^0_{02}\,dx_0\,\delta x_2 + \\ &+ \Gamma^0_{03}\,dx_0\,\delta x_3 + \Gamma^0_{10}\,dx_1\,dx_0 + \Gamma^0_{11}\,dx_1\,\delta x_1 + \\ &+ \Gamma^0_{12}\,dx_1\,\delta x_2 + \Gamma^0_{13}\,dx_1\,\delta x_3 + \Gamma^0_{20}\,dx_2\,\delta x_0 + \\ &+ \Gamma^0_{21}\,dx_2\,\delta x_1 + \Gamma^0_{22}\,dx_2\,\delta x_2 + \Gamma^0_{23}\,dx_2\,\delta x_3 + \\ &+ \Gamma^0_{30}\,dx_3\,\delta x_0 + \Gamma^0_{31}\,dx_3\,\delta x_1 + \Gamma^0_{32}\,dx_3\,\delta x_2 + \\ &+ \Gamma^0_{33}\,dx_3\,\delta x_3) = -\Gamma^0_{kl}\,dx_k\,\delta x_l \end{aligned} \qquad (69)$$

mit Weglassung des Summenzeichens und unter der Bedingung, daß über die Indizes k und l von 0 bis 3 summiert werden soll. Dazu die übrigen Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\delta dx_1 &= -\Gamma^1_{kl}\,dx_k\,\delta x_l,\\ \delta dx_2 &= -\Gamma^2_{kl}\,dx_k\,\delta x_l,\\ \delta dx_3 &= -\Gamma^3_{kl}\,dx_k\,\delta x_l.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Zusammenfassend können wir kurz schreiben:

$$\delta dx_i = -\Gamma^i_{kl}\,dx_k\,\delta x_l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69')$$

Daß die von vornherein einleuchtenden Formeln (69) tatsächlich richtig gebildet sind, kann man bestätigen, indem man den

Gedankengang des Abschnittes I, b, 2, des geometrischen Teiles, S. 10ff., sinngemäß auf 4 Koordinaten ausdehnt und dabei den Begriff des geodätischen Koordinatensystems y_0, y_1, y_2, y_3 entsprechend durch die Bedingung festlegt:

$$\delta\, dy_i = 0\ ^{1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Die nähere Bestimmung der Christoffelschen Dreiindizessymbole Γ^i_{kl} erfolgt auch hier mit Hilfe des Bogenelementes (68), dessen Betrag ds bei einer Parallelverschiebung, übrigens auch bei jeder anderen Verschiebung ungeändert bleiben soll:

$$\delta\, ds = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Die Variation von ds^2 führt dann in derselben Weise wie früher (S. 13) zu einem Ausdruck gleicher Bauart wie (16) und mit Verwendung von (69) ergeben sich als Verallgemeinerung von (18) zuletzt die Ausdrücke Γ^i_{kl} in der Form:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{G_{im}}{2\,g}\left(\frac{\partial\, g_{km}}{\partial\, x_l} + \frac{\partial\, g_{lm}}{\partial\, x_k} - \frac{\partial\, g_{kl}}{\partial\, x_m}\right), \quad . \quad . \quad (72)$$

wobei über den zweimal auftretenden Index m nach früherer Vereinbarung von 0 bis 3 zu summieren ist und die Größen G_{im} die adjungierten Unterdeterminanten zu den g_{im} bedeuten, deren Determinante den Wert

---

[1]) Der Gang der Rechnung sei hier kurz angedeutet. Die geodätischen Koordinaten y_i sind als Funktionen der beliebigen krummlinigen Koordinaten x_i zu denken:

$$y_i = y_i(x_0, x_1, x_2, x_3);$$

vgl. die Formeln (9). Durch totale Differentiation erhalten wir die den Gleichungen (10) entsprechenden Ausdrücke:

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\, dx_k$$

in abgekürzter Schreibweise mit Fortlassung des Summenzeichens. Die Variation der dy_i liefert mit Berücksichtigung der Bedingung (70) zur Berechnung der $\delta\, dx_k$ die Gleichungen:

$$\delta\, dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\, \delta\, dx_k + \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k\, \partial x_l}\, dx_k\, \delta x_l = 0;$$

vgl. die Formeln (12). Die Symmetrie der Ausdrücke $\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k\, \partial x_l}$ in bezug auf die Indizes k und l läßt erkennen, daß die Koeffizienten Γ^i_{kl}, welche in dem Lösungssysteme (69), bzw. (69′) auftreten, in bezug auf die unteren Indizes symmetrisch sein müssen:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}.$$

$$g = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \qquad (g_{ik} = g_{ki}) \quad . \quad . \quad (73)$$

hat.

Zur Einführung in den eigenartigen Rechenmechanismus der Tensoralgebra ist es zweifellos von großem Nutzen, die Herleitung der Formel (72) auf dem eben angedeuteten und durch die Ausführungen für zwei Koordinaten (S. 13 f.) vorgezeichneten Wege genauer zu verfolgen. Wir bedienen uns hiebei mit besonderem Vorteile der die schleppenden Summenzeichen vermeidenden Schreibweise, die sich auf das nun schon wiederholt hervorgehobene Übereinkommen gründet, daß über in demselben Term zweimal auftretende Indizes von 0 bis 3 summiert werden soll. Indem wir so verfahren, erhalten wir durch Variation aus (68′):

$$\delta(ds^2) = \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} dx_i\, dx_k + g_{ik} \frac{\partial dx_i}{\partial x_l} dx_k + \right.$$

$$\left. + g_{ik} \frac{\partial dx_k}{\partial x_l} dx_i \right) \delta x_l = 0.$$

Wir eliminieren hieraus $\frac{\partial dx_i}{\partial x_l}$ und $\frac{\partial dx_k}{\partial x_l}$ mit Hilfe von (69′), indem wir dort den Summationsbuchstaben k durch m ersetzen:

$$\frac{\partial dx_i}{\partial x_l} = -\Gamma^i_{ml}\, dx_m, \quad \frac{\partial dx_k}{\partial x_l} = -\Gamma^k_{ml}\, dx_m.$$

Dies ergibt:

$$\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} dx_i\, dx_k - g_{ik}\, \Gamma^i_{ml}\, dx_k\, dx_m - g_{ik}\, \Gamma^k_{ml}\, dx_i\, dx_m \right) \delta x_l = 0.$$

Um die in der Klammer stehenden 3 Terme in geeigneter Weise zusammenfassen zu können, nehmen wir einen Tausch der Indizes vor u. zw. im 2. Term zwischen m und i, im 3. zwischen m und k; wir erhalten so:

$$\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} - g_{mk}\, \Gamma^m_{il} - g_{im}\, \Gamma^m_{kl} \right) dx_i\, dx_k\, \delta x_l = 0,$$

eine in bezug auf die dx_i quadratische, in bezug auf die δx_l lineare Differentialform, welche die Verallgemeinerung von (16′) darstellt und wie diese für beliebige Werte der dx_i und δx_i identisch verschwinden muß. Dies ist wieder nur so möglich, daß sämtliche Koeffizienten verschwinden, was zu den Gleichungen führt:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} = g_{mi}\,\Gamma^m_{kl} + g_{mk}\,\Gamma^m_{il} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

In diesen 4^3 Relationen — i, k, l, m durchlaufen alle Werte von 0 bis 3 und über m ist insbesonders in jeder Gleichung von 0 bis 3 zu summieren — haben wir die Verallgemeinerung der Formeln (17) vor uns. Sie reichen zur Bestimmung der 4^3 Größen Γ^m_{kl} aus, welche in ihnen bloß linear vorkommen. Zu ihrer Berechnung schreiben wir die Gleichungen (74) mit Vertauschung der Indizes k und l in der Form:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} = g_{mi}\,\Gamma^m_{lk} + g_{ml}\,\Gamma^m_{ik}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74')$$

ferner mit Vertauschung der Indizes i und l in der Form:

$$\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_i} = g_{ml}\,\Gamma^m_{ki} + g_{mk}\,\Gamma^m_{li} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74'')$$

und bilden weiter, indem wir von der Symmetrieeigenschaft

$$\Gamma^m_{ik} = \Gamma^m_{ki}\ ^{1})$$

Gebrauch machen,

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_i} = 2\,g_{mi}\,\Gamma^m_{kl} = \\ = 2\,(g_{0i}\,\Gamma^0_{kl} + g_{1i}\,\Gamma^1_{kl} + g_{2i}\,\Gamma^2_{kl} + g_{3i}\,\Gamma^3_{kl}). \quad (75)$$

(75) stellt ein System von 4^3 linearen Gleichungen dar, welches in einfacher Weise die Größen Γ^m_{kl} zu berechnen gestattet. Wie man sogleich erkennt, ordnen sich diese Gleichungen in 4^2 Gruppen zu je 4, die bei festen Werten der Indizes k und l jeweils dadurch entstehen, daß der Index i alle Werte von 0 bis 3 durchläuft. Jede solche Gruppe enthält nur 4 verschiedene Symbole und hat folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} g_{00}\,\Gamma^0_{kl} + g_{10}\,\Gamma^1_{kl} + g_{20}\,\Gamma^2_{kl} + g_{30}\,\Gamma^3_{kl} = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_0}\right), \\ g_{01}\,\Gamma^0_{kl} + g_{11}\,\Gamma^1_{kl} + g_{21}\,\Gamma^2_{kl} + g_{31}\,\Gamma^3_{kl} = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_1}\right), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (75')$$

[1]) Siehe die Fußnote auf S. 39.

$$\left.\begin{aligned} g_{02}\,\Gamma^0_{kl} + g_{12}\,\Gamma^1_{kl} + g_{22}\,\Gamma^2_{kl} + g_{32}\,\Gamma^3_{kl} &= \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_2}\right), \\ g_{03}\,\Gamma^0_{kl} + g_{13}\,\Gamma^1_{kl} + g_{23}\,\Gamma^2_{kl} + g_{33}\,\Gamma^3_{kl} &= \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{3k}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_3}\right). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (75')$$

Dieses System von nur 4 linearen Gleichungen erlaubt die Berechnung der 4 Dreiindizessymbole Γ^0_{kl}, Γ^1_{kl}, Γ^2_{kl}, Γ^3_{kl} nach bekannten Regeln. Wir schreiben die Lösung für Γ^0_{kl} in extenso hin:

$$\Gamma^0_{kl} = \frac{1}{g}\cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_0}\right), & g_{10}, & g_{20}, & g_{30} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_1}\right), & g_{11}, & g_{21}, & g_{31} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_2}\right), & g_{12}, & g_{22}, & g_{32} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{3k}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_3}\right), & g_{12}, & g_{23}, & g_{33} \end{vmatrix} \quad [1])$$

Bezeichnen wir die zu den g_{ik} adjungierten Unterdeterminanten 1. Ordnung wie oben mit G_{ik}, so können wir nach einem geläufigen Determinantensatze die Zählerdeterminante in der Form darstellen:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_m}\right) . G_{0m},$$

wobei nach Vereinbarung über den Index m von 0 bis 3 zu summieren ist. Wir gelangen so zu dem Ergebnis:

$$\Gamma^0_{kl} = \frac{G_{0m}}{2\,g}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_m}\right), \quad . \quad . \quad (72')$$

dessen einleuchtende Verallgemeinerung für einen beliebigen oberen Index i offenbar durch die zu beweisende Formel (72) geliefert wird.

Es sei hier noch betont, daß der eben mitgeteilte Beweisgang im wesentlichen von der speziellen Koordinatenzahl 4 gänzlich unabhängig ist. Insbesondere folgen für 2 Variable — wenn wir die Indizes k, l, i, m auf die Werte 1,2 beschränken — aus (72) unmittelbar die Formeln (18_1) bis (18_3).

Die Größen Γ^i_{kl} bilden einen Tensor 3. Stufe mit $4^3 = 64$ Komponenten, von welchen im Hinblicke auf die Symmetrie-

[1]) g bedeutet den Wert der Determinante der g_{ik}, Formel (73).

bedingung $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$ $4 \cdot 12 = 48$ paarweise gleich sind. Mithin sind im allgemeinen $24 + 16 = 40$ Komponenten verschieden. Vgl. die analoge Betrachtung über die Komponenten g_{ik} des metrischen Fundamentaltensors im vorhergehenden Abschnitt.

Wie die oben durchgeführten Entwicklungen zeigen, beruht die Verallgemeinerung der infinitesimalen Parallelverschiebung sowie der damit verknüpften Dreiindizessymbole Γ^i_{kl} auf der Anwendung eines aus der Flächentheorie stammenden, leicht zu überblickenden Formalismus, dessen Bedeutung für die Physik zunächst noch in keiner Weise klar ist. Erst die daraus gezogenen Folgerungen werden einen physikalischen Inhalt haben, der auch einer Überprüfung durch die Erfahrung fähig ist.

Wir fragen zuvörderst nach den geodätischen Linien der vierdimensionalen „Welt" und können hier wortgetreu nur mit Änderung der Koordinatenzahl den Gedankengang von I, b, 3, des geometrischen Teiles (S. 14f.) zur Anwendung bringen, der zu folgenden Gleichungen führt:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_l}{ds} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

welche dieselbe Gestalt wie (21′) haben und nur den einen Unterschied aufweisen, daß jetzt die Indizes i, k, l alle Werte von 0 bis 3 durchlaufen und über die im 2. Term zweimal auftretenden Indizes k und l von 0 bis 3 zu summieren ist.

Den geodätischen Linien (76) kommt in der Einsteinschen Gravitationstheorie eine grundlegende Bedeutung zu. Sie enthalten offenbar eine Aussage über einen physikalischen Vorgang und erinnern schon in ihrer Gestalt an die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik. Das erste Glied hat den Charakter einer Beschleunigung jedoch mit dem Unterschiede, daß an die Stelle der gewöhnlichen Zeit $dx_0 = dt$ die Eigenzeit ds getreten ist. Im gleichen Sinne haben die Ausdrücke $\frac{dx_k}{ds}$, $\frac{dx_l}{ds}$ die Form von Geschwindigkeiten. Wir können daher den Inhalt von (76) vorläufig etwa so aussprechen: An jedem Orte und zu jeder Zeit, kurz in jedem Weltpunkte erscheint die Beschleunigung eines bewegten Punktes bestimmt als Funktion seiner Geschwindigkeit und der geometrischen Beschaffenheit der „Welt" an dieser Stelle, welche in den Γ^i_{kl} zum Ausdrucke kommt.

Deuten wir nun mit Einstein diese geometrische Beschaffenheit der „Welt" als Folge von Schwerewirkungen vorhandener Massen, so haben wir in (76) offenbar die Bewegungsgleichungen eines Punktes vor uns in einem mit gravitierender Materie er-

füllten Raume. Das Grundproblem der Gravitationstheorie Einsteins gipfelt somit in der Frage:

In welchem arithmetischen Zusammenhange stehen die geometrischen Größen Γ^i_{kl} bzw. g_{ik}, von welch letzteren die ersteren gemäß (72) ausschließlich abhängen, mit den im Raume verteilten schweren Massen?

Soviel können wir zu dieser Frage gleich sagen. Dem Verschwinden sämtlicher Symbole Γ^i_{kl} entspricht physikalisch das Fehlen jeglicher gravitierender Materie. In der Tat folgt aus (76) für diesen Fall:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76')$$

Nun ist offenbar $\frac{dx_i}{ds} = \frac{dx_i}{dx_0} \cdot \frac{dx_0}{ds}$

und weiter $\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{d^2 x_i}{dx_0^2} \cdot \left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 + \frac{dx_i}{dx_0} \cdot \frac{d^2 x_0}{ds^2}$,

welcher Ausdruck zufolge (76′) verschwinden muß. Es ist aber sein 2. Term gemäß (76′), wenn wir dort $i = o$ setzen, selbst gleich Null; mithin muß, da jedenfalls $\frac{dx_0}{ds} \neq 0$ ist,

$$\frac{d^2 x_i}{dx_0^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76'')$$

sein, d. h. (für $i = 1, 2, 3$) die Komponenten der Beschleunigung des bewegten Punktes — x_0 bedeutet ja die gewöhnliche Zeit t — sind gleich Null. Im Falle des Verschwindens der Γ^i_{kl} ist somit die Bewegung eines materiellen Punktes geradlinig gleichförmig, sie erfolgt nach dem bekannten Galileischen Trägheitssatze, dessen Gültigkeit die Abwesenheit aller beschleunigungerzeugenden schweren Massen zur Voraussetzung hat.

Sind jedoch sämtliche Γ^i_{kl} gleich Null, so müssen andererseits die Komponenten g_{ik} des metrischen Fundamentaltensors konstante Werte haben — vgl. die analoge Betrachtung des Abschnittes IV des geometrischen Teiles, S. 31 — d. h. die in der „Welt“ herrschende Geometrie ist die euklidische und auch die Geometrie des dreidimensionalen Raumes, unseres Beobachtungsraumes, als eines Bestandteiles der „Welt“ ist dann euklidisch. Die Bahnen bewegter Punkte aber sind die Geraden (geodätischen Linien) dieses Raumes.

III. Verallgemeinerung des Krümmungstensors und seine Rolle in der Gravitationstheorie.

Wie in der Flächentheorie (A. IV., S. 28ff.) können wir auch in bezug auf die vierdimensionale „Welt“ die Frage aufwerfen, unter welcher Bedingung die Endstellung eines Vektors (Vierervektors) bei Parallelverschiebung unabhängig vom gewählten Wege ist. Die Aufgabe läßt sich vollkommen analog wie dort behandeln und führt zunächst zur Forderung, daß die Ausdrücke (69) vollständige Differentiale sein müssen. Dies ist der Fall, wenn sämtliche gemischten zweiten partiellen Ableitungen der dx_i entsprechend der Bedingung (55) paarweise einander gleich sind. Aus (69′) erhalten wir für die ersten partiellen Ableitungen die Werte:

$$\frac{\partial\, dx_i}{\partial x_l} = -\Gamma^i_{kl}\, dx_k, \quad \frac{\partial\, dx_i}{\partial x_m} = -\Gamma^i_{km} dx_k, \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

wobei über k vereinbarungsgemäß von 0 bis 3 zu summieren ist. Die Ausdrücke (69) sind 4 Bilinearformen mit je $4^2 = 16$ Gliedern, aus denen die 16 Gleichungen (77) folgen. Sollen nun die gemischten zweiten partiellen Ableitungen paarweise einander gleich sein, so muß für alle Werte von i, l und m

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial\, dx_i}{\partial x_m}\right) = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial\, dx_i}{\partial x_l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

sein. Es sind dies $4^3 = 64$ Gleichungen, von denen jedoch für $l = m$ 16 identisch erfüllt sind. Aus (77) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial\, dx_i}{\partial x_m}\right) &= -\frac{\partial\, \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} dx_k - \Gamma^i_{km}\frac{\partial\, dx_k}{\partial x_l}, \\ \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial\, dx_i}{\partial x_l}\right) &= -\frac{\partial\, \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} dx_k - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial\, dx_k}{\partial x_m}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (79)$$

Indem wir in (77) den Index i durch k und gleichzeitig, um eine Verwirrung auszuschließen, auf den rechten Seiten den Summationsbuchstaben k durch n ersetzen, über welchen dann gleichfalls von 0 bis 3 zu summieren ist, erhalten wir weiter:

$$\frac{\partial\, dx_k}{\partial x_l} = -\Gamma^k_{nl}\, dx_n, \quad \frac{\partial\, dx_k}{\partial x_m} = -\Gamma^k_{nm}\, dx_n. \quad . \quad . \quad (77')$$

Wir setzen diese Ausdrücke in (79) ein und es folgt sodann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial\, dx_i}{\partial x_m}\right) &= -\frac{\partial\, \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} dx_k + \Gamma^i_{km}\Gamma^k_{nl}\, dx_n, \\ \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial\, dx_i}{\partial x_l}\right) &= -\frac{\partial\, \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} dx_k + \Gamma^i_{kl}\Gamma^k_{nm}\, dx_n; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (79')$$

dabei ist auf den rechten Seiten sowohl über k wie über n von 0 bis 3 zu summieren. Da somit n und k gleichwertige Indizes sind, können wir in den zweiten Termen der rechten Seiten n und k vertauschen, wodurch die Gleichungen (79′) die übersichtlichere Gestalt annehmen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial dx_i}{\partial x_m}\right) &= \left(-\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} + \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}\right) dx_k,\\ \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial dx_i}{\partial x_l}\right) &= \left(-\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}\right) dx_k.\end{aligned}\right\} \quad (79'')$$

Gemäß (78) muß daher:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial dx_i}{\partial x_m}\right) - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial dx_i}{\partial x_l}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} - \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} + \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}\right) dx_k = 0 \quad (80)$$

sein für beliebige Werte der dx_k. Das hat aber weiter zur Folge, daß sämtliche Koeffizienten

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} - \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} + \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} \quad (81)$$

verschwinden müssen.

Die Größen R^i_{klm} bilden einen Tensor 4. Stufe mit $4^4 = 256$ Komponenten, den wir in Anlehnung an die Flächentheorie als den Krümmungstensor 4. Stufe der „Welt" bezeichnen. Er besitzt folgende Eigenschaften. Aus (81) ist ersichtlich, daß

$$R^i_{klm} = -R^i_{kml} \quad (82)$$

ist, d. h. er ist in bezug auf die Indizes l und m „schief" symmetrisch, seine Komponenten lassen sich zu Paaren ordnen, die gleichen absoluten Betrag, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Zu bestimmten Werten von i und k gehören $4^2 = 16$ Komponenten, von denen 6 Paare sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden und die übrigen 4 ($l = m$) identisch verschwinden, da für $l = m$ aus (82)

$$R^i_{kmm} = 0 \quad (82')$$

folgt. Der Tensor R^i_{klm} umfaßt also $4^2 . 6 = 96$ Paare sich gemäß (82) nur durch das Vorzeichen unterscheidender Komponenten und dazu noch $4^2 . 4 = 64$ Komponenten, welche gemäß (82′) identisch verschwinden.

Aus dem Tensor (81) wollen wir nun durch geeignete Zusammenfassung seiner Komponenten einen Tensor 2. Stufe ableiten, der dem unter A. IV., Formel (59) gewonnenen Krümmungstensor R_{kl} der Flächentheorie vollkommen analog gebaut ist. Ein solcher Tensor wird im Falle von 4 Dimensionen $4^2 = 16$ Komponenten haben müssen, die wir aus den 256 Komponenten von R^i_{klm} durch ein Verfahren gewinnen, das in der Tensoralgebra als „Verjüngung" bezeichnet wird und darin besteht, daß 2 Indizes, ein „oberer" und ein „unterer", hier i und m, einander gleichgesetzt werden und darauf über diesen einen Index (hier von 0 bis 3) summiert wird:

$$R_{kl} = R^i_{kli}\left(= \sum_{i=0}^{3} R^i_{kli}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

Es werden so aus den 256 Komponenten R^i_{klm} nur die $4^3 = 64$ Komponenten R^i_{kli} ausgewählt und zu je 4 additiv zusammengefaßt, wodurch sich die Größe R_{kl} mit nur 16 Komponenten ergeben.

Führen wir den Prozeß (83) an (81) aus und setzen demnach $m = i$, indem wir nun auch über den zweimal auftretenden Index i von 0 bis 3 summieren, so erhalten wir

$$R_{kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^i_{ki}}{\partial x_l} + \Gamma^i_{ni}\Gamma^n_{kl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{ki} \quad . \quad . \quad (84)$$

den gesuchten Krümmungstensor 2. Stufe der „Welt". Er besitzt wie der metrische Fundamentaltensor g_{ik} $4^2 = 16$ Komponenten, von denen im allgemeinen 12 paarweise gleich und folglich nur 10 verschieden sind. Er ist ferner wie dieser symmetrisch:

$$R_{kl} = R_{lk}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Die Symmetrie des 1., 3. und 4. Terms von (84) in bezug auf die Indizes k und l ist zufolge der Symmetrieeigenschaft der Γ^i_{kl} ohneweiters klar, die des 2. Terms läßt sich in folgender Weise dartun.

Betrachtet man die Determinante (73) als Funktion der g_{im}, so ist nach einem bekannten Determinantensatze

$$g = \sum_i g_{im} G_{im},$$

folglich

$$\frac{\partial g}{\partial g_{im}} = G_{im}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

also gleich der zum Elemente g_{im} gehörigen Unterdeterminante G_{im}. Mithin wird

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial g}{\partial g_{im}} \cdot \frac{\partial g_{im}}{\partial x_k} = G_{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x_k}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

wobei vereinbarungsgemäß über i und m von 0 bis 3 zu summieren ist. Wir bilden nun mit Benützung von (72) die Verjüngung der Γ^i_{kl} in bezug auf die Indizes i und l:

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{G_{im}}{2g}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

oder mit Vertauschung der Summationsbuchstaben i und m

$$\Gamma^m_{km} = \frac{G_{im}}{2g}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x_i}\right)^{1}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88')$$

woraus durch Addition

$$\Gamma^i_{ki} + \Gamma^m_{km} = 2\Gamma^i_{ki} = \frac{G_{im}}{g}\frac{\partial g_{im}}{\partial x_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

folgt, indem wir beachten, daß infolge der Gleichwertigkeit der Summationsindizes i und m $\Gamma^m_{km} = \Gamma^i_{ki}$ ist. Mit Rücksicht auf (87) erhalten wir weiter

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln g}{\partial x_k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

Führen wir diesen Wert in den 2. Term von (84) ein, so wird

$$\frac{\partial \Gamma^i_{ki}}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln g}{\partial x_k \partial x_l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

ein in bezug auf die Indizes k und l symmetrischer Ausdruck. Damit erscheint die Formel (85) bewiesen.

Daß (84) tatsächlich die sinngemäße Verallgemeinerung des Krümmungstensors (59) ist, zeigt der Umstand, daß bei Beschränkung der Indizes i, k, l, n auf die Werte 1 und 2 aus dem System 84) das Wertesystem (59) als Sonderfall hervorgeht.

Wie aus (81) und (84) unmittelbar zu ersehen ist, verschwinden sämtliche Komponenten von R^i_{klm} und R_{kl}, sobald sämtliche $\Gamma^i_{kl} = 0$ sind. Dies tritt aber im Hinblicke auf (72) sicher ein, wenn die g_{ik} konstante Werte annehmen, also im Falle einer euklidischen „Welt". (Vgl. die analoge Betrachtung auf S. 31!) Wie wir uns schon früher (S. 44) klar gemacht haben, folgt die Bewegung eines materiellen Punktes dann notwendig dem Galileischen Trägheitsgesetze, es kann daher in dieser „Welt" keine Materie vorhanden sein, von der Schwerewirkungen ausgehen. Also: In der euklidischen „Welt", für welche sämtliche Kompo-

[1]) Aus der Symmetrie der g_{im} folgt. wie ein Blick auf die Determinante (73) lehrt, unmittelbar die gleiche Eigenschaft für die Unterdeterminanten G_{im}: $G_{mi} = G_{im}$.

nenten R_{kl} des Krümmungstensors verschwinden, die somit im Sinne der Flächentheorie nicht „gekrümmt", sondern „eben" ist, gibt es keine schweren Massen. Wir wollen mit Einstein in diesem Satze den Nachdruck auf das Verschwinden des Krümmungstensors R_{kl} legen. Damit gelangen wir zu der vollständig neuen und bedeutsamen Aussage:

Das Verschwinden sämtlicher Komponenten R_{kl} des Krümmungstensors ist der eigentliche Grund für das Fehlen gravitierender Materie von endlicher Ausdehnung[1]) in der „Welt".

Die ganze Tragweite des Einstein'schen Gedankens wird aber erst klar, wenn wir die noch fehlende Ergänzung hinzufügen:

In der „Welt" sind schwere Massen von endlicher Ausbreitung[1]) enthalten, wenn ihr Krümmungstensor R_{kl} von Null verschieden ist, d. h. wenn sie „gekrümmt" ist.

Es steht nichts im Wege, diesen Satz umzukehren und die „Krümmung" der „Welt" als Folge endlich ausgebreiteter Massen hinzustellen. Es wird damit nur die enge Wechselbeziehung zwischen „Krümmung der Welt" und gravitierender Materie zum Ausdruck gebracht, die in der Sprache der Mathematik kurz lautet:

Der Krümmungstensor R_{kl} der „Welt" ist eine Funktion der in ihr vorhandenen schweren Massen.

Diese Funktion zu bestimmen, ist Aufgabe der Gravitationstheorie Einsteins. Sie ist identisch mit der Frage nach den sogenannten Feldgleichungen der Gravitation, für die Einstein erst nach längeren Versuchen einen zweckmäßigen Ansatz gefunden hat. Es liegt jedoch außerhalb des Rahmens dieser Schrift, darauf näher einzugehen. Indem wir so auf die Untersuchung der Hauptfrage der Gravitationstheorie einfach verzichten, hat es für den Augenblick den Anschein, als ob wir uns damit jeder Möglichkeit begäben, zu irgendwelchen bedeutungsvollen Ergebnissen zu gelangen. Und doch ist dem nicht so.

Die Außerachtlassung der allgemeinen Feldgleichungen der Gravitation zwingt uns zwar von allen Problemen stetig (endlich) ausgebreiteter Materie Abstand zu nehmen, aber der Sonderfall, in welchem der Krümmungstensor verschwindet, ist mit der Betrachtung der euklidischen „Welt" noch keineswegs erschöpft. Die Feldgleichungen der Gravitation in der besonderen Gestalt

$$R_{kl} = 0 \quad (k, l = 0, 1, 2, 3), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

welche wir zur Grundlage der folgenden Untersuchungen machen, reichen auch noch zur Behandlung der Frage nach den Schwere-

[1]) Singulär auftretende Massenpunkte sind, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden, auch bei verschwindendem Krümmungstensor zulässig.

wirkungen einzelner isolierter Massenpunkte völlig aus. Sie stellen ein System partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung in bezug auf die g_{ik} dar, wie man aus (84) und (72) sofort erkennt. Dieses besitzt außer der oben erwähnten regulären Lösung, welche auf eine euklidische „Welt“ führt, auch noch eine singuläre, die wir im folgenden ausfindig zu machen haben und die sich als Lösung des Schwerefeldes eines einzigen punktförmigen Massenzentrums darstellen wird.

Es muß hier noch die Frage gestreift werden, warum gerade der Krümmungstensor R_{kl} zum Angelpunkte der Gravitationstheorie gemacht wird und nicht etwa die Größen Γ^i_{kl} oder irgendwelche anderen Ausdrücke. Der Grund ist an dieser Stelle noch nicht ersichtlich. Aber wir werden später erkennen, daß die Feldgleichungen (92), und zwar insbesondere die erste dieser Gleichungen

$$R_{00} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92')$$

die sinngemäße Verallgemeinerung der Laplace'schen Gleichung[1]) der klassischen Mechanik darstellen. Es ist dann leicht, weiter einzusehen, daß die Feststellung des funktionalen Zusammenhanges zwischen dem Krümmungstensor R_{kl} und der Materie, welche das über die Grenzen dieses Buches hinausreichende Grundproblem der Gravitationstheorie bezeichnet, auf die entsprechende sinngemäße Verallgemeinerung der Poisson'schen Gleichung[1]) hinausläuft.

IV. Ansatz für das Bogenelement der „Welt“ eines einzigen Massenpunktes. Berechnung der Γ^i_{kl} und des Krümmungstensors R_{kl}.

Jede Aufgabe der Gravitationstheorie erfordert zunächst die Lösung der Feldgleichungen der Gravitation, in unserem Falle also der Gleichungen (92). Diese besteht in der Auffindung von solchen Werten des metrischen Fundamentaltensors, dessen Komponenten g_{ik} im Hinblicke auf ihre physikalische Bedeutung gewöhnlich als Gravitationspotentiale bezeichnet werden, welche den Feldgleichungen (92) genügen.

Wir haben bereits gesehen, daß jedes System konstanter Werte der g_{ik} eine Lösung der Gleichungen (92) darstellt. Es ent-

[1]) Bedeutet V das Schwerepotential im Newton'schen Sinne und ϱ die Dichte der Materie, so lautet die Laplace'sche Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = \Delta V = 0,$$

die Poisson'sche Gleichung $\Delta V = 4\pi\varrho$.

spricht dies dem Falle einer euklidischen „Welt“ ohne materiellen Inhalt, welche den Gegenstand der speziellen (eingeschränkten) Relativitätstheorie bildet und bei der wir zunächst noch kurz verweilen wollen.

Die konstanten Werte der g_{ik} lassen sich insbesondere so wählen, wie aus dem folgenden Schema ersichtlich ist:

$$\left.\begin{array}{cccc} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

in welchem

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{sec} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

die Vakuumlichtgeschwindigkeit bedeutet. Die metrische Fundamentalform (68) nimmt somit die Gestalt an:

$$ds^2 = c^2 dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

worin x_0 die Zeit, x_1, x_2, x_3 räumliche Cartesische Koordinaten darstellen.

Die „Welt“ zerfällt — wie bei jedem statischen Schwerefelde — in Raum und Zeit. Demgemäß setzt sich (95) aus einem rein räumlichen Bestandteile

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

und einem rein zeitlichen $c^2 dx_0^2$ nach der Formel zusammen:

$$ds^2 = c^2 dx_0^2 - d\sigma^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95')$$

Würden die Koeffizienten g_{01}, g_{02}, g_{03} nicht verschwinden, so wäre eine derartige Zerfällung der „Welt“ in Raum und Zeit nicht möglich und ein zeitlich unveränderliches räumliches Bogenelement (96) nicht angebbar. Die im Beobachtungsraume herrschende Geometrie wäre ohne einen ersichtlichen physikalischen Grund — wir setzen ja statische Verhältnisse voraus — von der Zeit abhängig, eine Annahme, die zweifellos unzulässig ist.

Daß in dem Ansatze (95) auch die Koeffizienten g_{12}, g_{13}, g_{23} gleich Null sind, hat seinen Grund in der Wahl rechtwinkliger, geradliniger Koordinaten x_1, x_2, x_3, welche auf das bekannte räumliche Bogenelement (96) führen.

Die entgegengesetzten Vorzeichen des räumlichen und zeitlichen Bestandteiles von (95′) bringen die physikalische Verschiedenartigkeit von Raum und Zeit zum Ausdruck. Eine nähere Begründung dieses Umstandes ist nicht vonnöten, zumal ja die Idee der vierdimensionalen „Welt“ selbst und damit auch der

Ansatz für ihr Bogenelement als Hypothesen zu werten sind, von denen wir nur möglichste Einfachheit und möglichst weitreichende Gültigkeit der aus ihnen entspringenden Folgerungen im Bereiche der Erfahrung fordern dürfen. In der Tat kommt, wie gleich an dieser Stelle bemerkt sei, dem Bogenelemente ds, der Eigenzeit, gar nicht jene bemerkenswerte physikalische Bedeutung zu wie etwa den geodätischen Linien oder dem Krümmungstensor, deren physikalischer Sinn rückwirkend die Hypothese einer vierdimensionalen „Welt" rechtfertigt.

Als physikalischen Inhalt von (95), bezw. (95′) können wir Folgendes hinstellen. Beachten wir, daß $\frac{d\sigma}{dx_0}$ die Geschwindigkeit eines bewegten Punktes bedeutet, die in einer von schweren Massen freien „Welt" nach dem Trägheitsgesetze den konstanten Wert v besitzt:

$$\frac{d\sigma}{dx_0} = v, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (97)$$

so folgt aus (95′) durch Herausheben von dx_0^2 und darauffolgendes Ziehen der Quadratwurzel:

$$ds = dx_0 \sqrt{c^2 - v^2} \quad \ldots \ldots \quad (98)$$

als schärfere Umschreibung des Begriffes „Eigenzeit" in einer euklidischen „Welt". Aus (98) ist auch zu erkennen, warum in (95′) gerade dem räumlichen Bestandteile $d\sigma^2$ das negative Vorzeichen gegeben wurde und nicht dem zeitlichen $c^2 dx_0^2$, was grundsätzlich auch möglich gewesen wäre. Da, wie die eingeschränkte Relativitätstheorie lehrt, beständig

$$v \leq c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (99)$$

sein muß, würde bei anderer Verteilung der Vorzeichen der Wert der Eigenzeit offenbar imaginär geworden sein, was gewiß kein grundsätzliches Hindernis, aber doch unerwünscht wäre.

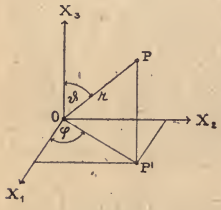


Abb. 12.

Benützen wir für die Darstellung von (96) statt der Cartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 räumliche Polarkoordinaten r, ϑ, φ, wie sie Abb. 12 ersichtlich macht, so erhalten wir die bekannte Form:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2) \quad \ldots \quad (100)$$

und für das Quadrat des Weltlinienelementes ds folgt daraus gemäß (95′), wenn wir für die Zeit x_0 den üblichen Buchstaben t setzen:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr^2 - r^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2). \quad . \quad . \quad (101)$$

Die Polarkoordinaten r, ϑ, φ tragen der Kugelsymmetrie des Raumes Rechnung und (100) bestimmt insbesondere das Bogenelement eines euklidischen Raumes, in welchem jeder Raumpunkt als Symmetriezentrum aufgefaßt werden kann. Denken wir uns nun in einen solchen euklidischen, im Sinne Einsteins von Materie freien Raum einen Massenpunkt versetzt, so muß dieser die darin herrschende Geometrie verändern; so fordert es die Gravitationstheorie. Wir erkennen aber sofort, daß diese Veränderungen nur von der Entfernung vom Massenpunkte abhängen können, daß die geometrischen Verhältnisse bei gleicher Entfernung vom Massenpunkte die gleichen sein müssen. Damit ist die Kugelsymmetrie des um ein Massenzentrum vorhandenen geometrischen Feldes dargetan und die besondere Eignung der Polarkoordinaten r, ϑ, φ (mit dem Massenpunkte als Pol) zu dessen Darstellung in Evidenz gesetzt.

Wir brauchen nur den Ansatz (101), der für eine euklidische „Welt“ und im besonderen für einen euklidischen Raum gilt, im Hinblicke auf (68) derart zu verallgemeinern, daß er den durch das Auftreten eines Massenpunktes zu erwartenden veränderten geometrischen Verhältnissen von vornherein angepaßt ist. Da bei gegebener Entfernung r die Geometrie in jeder Richtung dieselbe sein muß, so ist zunächst klar, daß die in den Koeffizienten g_{ik} auftretenden Veränderungen ausschließlich durch die Koordinate r bedingt sein müssen. Wegen der augenscheinlichen zeitlichen Unveränderlichkeit des Feldes können die g_{ik} ferner nicht Funktionen der Zeit t sein. Wir haben also ein statisches Schwerefeld und die „Welt“ muß infolgedessen wieder im Sinne von (95′) in Raum und Zeit zerfallen, so daß auch in der von uns angestrebten Verallgemeinerung von (101) sämtliche Koeffizienten $g_{0i} = g_{i0}$ $(i = 1, 2, 3)$ verschwinden müssen.

Wir folgen im übrigen nur einem ökonomischen Gedanken, wenn wir die Fundamentalform (101) nicht mehr, als auf den ersten Blick unerläßlich erscheint, verallgemeinern. Daß wir den Koeffizienten c^2 von dt^2, der das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit bedeutet, nicht beibehalten können, erhellt aus dem Umstande, daß wir vom Standpunkte der Gravitationstheorie eine Abhängigkeit der Lichtausbreitung vom herrschenden Schwerefelde zu erwarten haben oder doch in den Bereich der Möglichkeit ziehen müssen. Auch der Koeffizient $g_{11} = -1$ von dr^2 wird durch eine erst zu bestimmende Funktion von r zu ersetzen sein, da die von dem Massenpunkt in

radialer Richtung ausgehende Schwerewirkung voraussichtlich radial angelegte Maßstäbe beeinflussen wird. Dagegen wird das Schwerefeld auf Maßstäbe in der Richtung der Koordinaten ϑ oder φ, normal zum Radiusvektor r, vermutlich ohne Wirkung sein, weshalb wir die Koeffizienten von $d\vartheta^2$ und $d\varphi^2$ in (101) beibehalten werden. Auch an dem Verschwinden der Koeffizienten g_{12}, g_{13}, g_{23} wollen wir in Anbetracht der nach wie vor vorhandenen Kugelsymmetrie des räumlichen Feldes festhalten. Wir gewinnen so den neuen Ansatz für das Quadrat des Weltlinienelementes:

$$ds^2 = g_0\,dt^2 - g_1\,dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2). \quad . \quad (102)$$

Darin stellen g_0 und g_1 Funktionen von r allein dar, welche die geometrische und physikalische Natur der „Welt" eines einzigen Massenpunktes bestimmen und mit Hilfe der Feldgleichungen (92) zu ermitteln sein werden.

Bei der Feststellung von (102) haben wir uns im Streben nach Einfachheit von plausiblen Überlegungen leiten lassen. Die im folgenden durchgeführte Berechnung und Integration der Feldgleichungen (92) für diesen Fall wird die Zulässigkeit von (102) dartun. Ein anderer Ansatz mit mehr unbestimmten Koeffizienten oder gar die allgemeine Fundamentalform (68) wären gewiß sicherer und freier von einer möglicherweise unerlaubten Beschränkung, würden uns aber in äußerst verwickelte mathematische Probleme hineinführen, die uns schließlich doch wieder zu vereinfachenden Annahmen zwängen. Daher erweist sich der oben eingeschlagene Weg eines versuchsweisen Ansatzes als der einzig gangbare.

Der metrischen Fundamentalform (102) entspricht das folgende Schema der g_{ik}:

$$\left.\begin{array}{cccc} g_0(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_1(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\vartheta \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

dessen Determinante (73) hier den Wert hat:

$$g = -g_0 g_1 r^4 \sin^2\vartheta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Dabei ist im allgemeinen Ansatze (68)

$$x_0 = t,\ x_1 = r,\ x_2 = \vartheta,\ x_3 = \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

zu setzen. Beim Verschwinden des Massenpunktes müssen die Werte (103) stetig übergehen in die Koeffizienten der Differentialform (101).

Wir wenden uns nun zur Berechnung der Γ^i_{kl} [1]) gemäß Formel (72) unter Zugrundelegung der Werte (103) und (104) und ermitteln zunächst die zu den g_{ik} adjungierten Unterdeterminanten G_{ik}, deren durch die Determinante (104) dividierte Werte $\frac{G_{ik}}{g}$ die folgende Zusammenstellung wiedergibt:

$$\left.\begin{array}{cccc} \frac{1}{g_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (106)$$

Im Hinblicke auf (72) und (103) ist sogleich zu erkennen, daß von den Symbolen Γ^i_{kl} nur jene mit mindestens zwei gleichen Indizes von Null verschieden sein können:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma^i_{ki} = \Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2 g_{ii}} \cdot \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k}, \\ \Gamma^i_{kk} = -\frac{1}{2 g_{ii}} \cdot \frac{\partial g_{kk}}{\partial x_i}, \\ \Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2 g_{ii}} \cdot \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i}, \\ \Gamma^i_{kl} = 0 \text{ für } i \neq k \neq l. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (107)$$

Beachten wir ferner, daß zufolge (103) g_{00}, g_{11}, g_{22} bloß von r, g_{33} dagegen von r und ϑ abhängt, so ergibt die Ausrechnung von

[1]) Vgl. für das Folgende des Verfassers Abhandlung: Kugelsymmetrische Lösungssysteme der Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation für eine ruhende, gravitierende Flüssigkeit mit linearer Zustandsgleichung, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissenschaften in Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa, Bd. 127 (1918), S. 2145 ff. Die dortigen Klammersymbole $\left\{ \begin{matrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\}$ sind mit den $\Gamma^{\alpha}_{\mu\ \nu}$ identisch und die dortigen Ausdrücke $G_{\mu\ \nu}$ gleich den negativ genommenen Komponenten des hier eingeführten Krümmungstensors $R_{\mu\ \nu}$.

(107) bei Berücksichtigung von (105) die folgende Tabelle der Christoffelschen Dreiindizessymbole:

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{g_0'}{2\,g_0};\\
&\Gamma^1_{00} = \frac{g_0'}{2\,g_1},\ \Gamma^1_{11} = \frac{g_1'}{2\,g_1},\ \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{g_1},\ \Gamma^1_{33} = -\frac{r}{g_1}\sin^2\vartheta;\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r},\ \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta;\\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\vartheta;
\end{aligned}\right\} \quad (108)$$

sonst $\qquad \Gamma^i_{kl} = 0.$

Der zu g_0, bzw. g_1 beigefügte Akzent bedeutet die Ableitung nach der Koordinate $x_1 = r$.

Die Berechnung des Krümmungstensors R_{kl}[1]) gelingt nunmehr ohne Schwierigkeit; wir erhalten aus (84) mit Rücksicht auf (108) und (105) die Werte:

$$\left.\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{d\,\Gamma^1_{00}}{dr} - \Gamma^1_{00}\,(\Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13}) =\\
&= \frac{g_0''^{\,2})}{2\,g_1} - \frac{g_0'^{\,2}}{4\,g_0\,g_1} - \frac{g_0'\,g_1'}{4\,g_1^{\,2}} + \frac{g_0'}{r\,g_1},\\
R_{11} &= -\frac{d}{dr}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) - (\Gamma^0_{10})^2 -\\
&\quad - (\Gamma^2_{12})^2 - (\Gamma^3_{13})^2 + \Gamma^1_{11}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) =\\
&= -\frac{g_0''^{\,2})}{2\,g_0} + \frac{g_0'^{\,2}}{4\,g_0^{\,2}} + \frac{g_0'\,g_1'}{4\,g_0\,g_1} + \frac{g_1'}{r\,g_1},\\
R_{22} &= \frac{d\,\Gamma^1_{22}}{dr} - \frac{d\,\Gamma^3_{23}}{d\vartheta} - (\Gamma^3_{23})^2 - \Gamma^1_{22}\,(\Gamma^2_{12} - \Gamma^0_{10} -\\
&\quad - \Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{13}) = -\frac{r\,g_0'}{2\,g_0\,g_1} + \frac{r\,g_1'}{2\,g_1^{\,2}} - \frac{1}{g_1} + 1,\\
R_{33} &= \frac{\partial\,\Gamma^1_{33}}{\partial r} + \frac{d\,\Gamma^2_{33}}{d\vartheta} - \Gamma^1_{33}\,(\Gamma^3_{13} - \Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{11} -\\
&\quad - \Gamma^2_{12}) - \Gamma^2_{33}\,\Gamma^3_{23} = R_{22}\sin^2\vartheta,\\
R_{kl} &= 0 \text{ für } k \neq l.
\end{aligned}\right\} \quad (109)$$

[1]) Siehe die Fußnote auf S. 55.

[2]) $g_0'' = \frac{d^2 g_0}{dr^2}$.

V. Die Feldgleichungen der Schwere für einen einzelnen Massenpunkt und ihre Integration.

Wir haben im vorangehenden Abschnitte auf Grund des Ansatzes (102) für das geometrische Feld eines einzelnen Massenpunktes die Komponenten R_{kl} des Krümmungstensors der „Welt" ermittelt und hiefür die Ausdrücke (109) gefunden. Wie wir aus den Ausführungen von *B. III.* wissen, gelten die Feldgleichungen (92), die wir durch Nullsetzen der Größen R_{kl} erhalten, nicht nur für den Fall der Abwesenheit jeglicher Materie, sondern auch noch bei Vorhandensein diskreter Massen, also insbesondere für das Schwerefeld eines einzigen Massenpunktes. Wir haben bei dessen Ermittlung unsere Aufmerksamkeit nur den singulären Lösungen des Gleichungssystems (92) zuzuwenden. Mithin folgen aus (92) und (109) die gesuchten Feldgleichungen der Gravitation:

$$\frac{g_0''}{2g_1} - \frac{g_0'^2}{4g_0g_1} - \frac{g_0'g_1'}{4g_1^2} + \frac{g_0'}{rg_1} = 0, \quad \ldots \quad (110_1)$$

$$-\frac{g_0''}{2g_0} + \frac{g_0'^2}{4g_0^2} + \frac{g_0'g_1'}{4g_0g_1} + \frac{g_1'}{rg_1} = 0, \quad \ldots \quad (110_2)$$

$$-\frac{rg_0'}{2g_0g_1} + \frac{rg_1'}{2g_1^2} - \frac{1}{g_1} + 1 = 0. \quad \ldots \quad (110_3)$$

$R_{33} = 0$ führt wegen $R_{33} = R_{22}\sin^2\vartheta$ wieder auf (110_3), die übrigen Gleichungen $R_{kl} = 0$ sind zufolge der letzten Relation von (109) identisch erfüllt.

Wir haben so zur Bestimmung der unbekannten Schwerepotentiale g_0 und g_1 drei Differentialgleichungen gewonnen, davon zwei von der zweiten Ordnung. Die Aufgabe erscheint somit überbestimmt und wir werden uns schließlich zu überzeugen haben, daß die gefundene Lösung auch tatsächlich alle drei Gleichungen (110) befriedigt, womit zugleich deren Widerspruchslosigkeit dargetan sein wird.

Die Integration der Feldgleichungen (110) gestaltet sich überaus einfach, wenn wir die beiden ersten Gleichungen folgendermaßen zu einer neuen vereinigen. Wir bilden $(110_1).g_1 + (110_2).g_0$; das ergibt:

$$\frac{g_0'}{r} + \frac{g_0g_1'}{rg_1} = 0,$$

woraus die einfache Beziehung folgt:

$$\frac{g_0'}{g_0} + \frac{g_1'}{g_1} = 0, \quad \ldots \quad (111)$$

deren Integral offenbar

$$ln\, g_0 + ln\, g_1 = ln\, C$$

oder

$$g_0 g_1 = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

ist. Die Integrationskonstante C bestimmen wir vermöge der Bedingung, daß in unendlicher Entfernung vom Massenzentrum dessen Schwerewirkung erfahrungsgemäß aufhören muß und infolgedessen die metrischen Verhältnisse der euklidischen „Welt" mit dem Linienelemente (101) Platz greifen müssen:

$$g_0 = c^2, \; g_1 = 1.$$

Wir erhalten so:

$$C = c^2.$$

(112) geht somit über in

$$g_0 g_1 = c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112')$$

Zum Integrale (112′) finden wir leicht ein zweites durch den folgenden Vorgang. Wir fassen zusammen: $(110_3) . \frac{1}{r} + (111) . \frac{1}{2 g_1}$ und multiplizieren mit (-1):

$$-\frac{g_1'}{g_1^2} + \frac{1}{r g_1} - \frac{1}{r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

oder

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{g_1}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{g_1}\right) - \frac{1}{r} = 0.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integral nach einer bekannten Formel lautet:

$$\frac{1}{g_1} = e^{-\int \frac{dr}{r}} \cdot \left[K + \int \frac{dr}{r} e^{\int \frac{dr}{r}}\right] = \frac{1}{r}(K + r),$$

worin K wieder eine Integrationskonstante vorstellt, die wir gleich $-\alpha$ setzen wollen, so daß das Integral die Gestalt annimmt:

$$\frac{1}{g_1} = 1 - \frac{\alpha}{r} \quad \text{oder} \quad g_1 = \frac{r}{r - \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

Dazu liefert (112′):

$$g_0 = \frac{c^2}{g_1} = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

Wir haben so die erstmals von K. Schwarzschild[1]) angegebene strenge Lösung des Massenpunktfeldes erhalten. Man stellt leicht

[1]) K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1916, 7, S. 189 ff.

durch Einsetzen fest, daß (114) und (115) in der Tat die Feldgleichungen (110_1) bis (110_3) befriedigen. Die vorläufig noch unbestimmte Integrationskonstante α hängt, wie sich im folgenden zeigen wird, aufs engste mit der physikalischen Masse des materiellen Zentrums zusammen.

VI. Physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten α. Die Geometrie des Schwerefeldes eines punktförmigen Massenzentrums.

Wir wollen nunmehr versuchen, eine Brücke zur klassischen Physik zu schlagen, um Aufschluß über die Bedeutung des Schwerepotentials g_0 zu erhalten. Wir haben uns zu diesem Behufe zu vergegenwärtigen, daß die Ergebnisse einer über die Newtonsche Physik hinausgehenden Theorie im Hinblicke auf die uns zu Gebote stehenden Erfahrungstatsachen nur um ein Geringes von den klassischen Werten abweichen können. Übrigens haben sich bisher nur in sehr wenigen, für die Technik kaum bedeutsamen Fällen merkliche Abweichungen ergeben, die jedoch immer deutlicher die Mängel der Newtonschen Physik erkennen ließen und schließlich die Theoretiker dazu drängten, auch an der scheinbar fest gegründeten klassischen Mechanik zu rütteln. Dabei war aber von vornherein klar, daß eine Verbesserung nur in einer Vervollkommnung der mathematischen Hilfsmittel bestehen könne, die, das Gesamtgebiet der Physik umspannend, die klassische Theorie als erste Näherung enthalten müßten. Diesen Standpunkt also müssen wir gegenüber der Gravitationstheorie Einsteins einnehmen und sohin von ihr fordern, daß sie in erster Näherung die Newtonsche Theorie liefere.

In diesem Sinne wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf die Komponente R_{00} des Krümmungstensors (109) lenken. Beachten wir, daß in der euklidischen „Welt" der klassischen Physik die Ableitungen g_0', g_0'', g_1' der (dort konstanten) Gravitationspotentiale g_0, g_1 verschwinden, so müssen wir sie hier als kleine Größen erster Ordnung auffassen. Die Produkte $g_0'^2$ und $g_0' g_1'$ sind dann jedenfalls klein von der zweiten Ordnung und können somit bei der von uns beabsichtigten Rechnung in erster Näherung gegenüber den Gliedern erster Ordnung vernachlässigt werden. Aus (109_1) fallen so die Mittelglieder heraus und es wird

$$R_{00} \sim \left(\frac{g_0''}{2} + \frac{g_0'}{r} \right) \cdot \frac{1}{g_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Welche physikalische Bedeutung kommt nun dieser Formel zu? Um sie zu ergründen, wollen wir den aus der klassischen Physik

bekannten Laplaceschen Operator, der in den Cartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 die Gestalt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} \quad \ldots \quad (117)$$

hat, auf die räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, φ transformieren. Die Umrechnung ergibt unter der Voraussetzung von Kugelsymmetrie:[1])

$$r^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x_3} = \frac{x_3}{r};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{x_3}{r}\frac{\partial}{\partial r};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} = \frac{x_1}{r}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial r} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{r}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r} = \frac{{x_1}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{{x_1}^2}{r^3}\right)\frac{\partial}{\partial r}$$

nebst zwei entsprechenden Formeln für $\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$ und $\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}$. Daraus berechnet sich der Operator (117) zu

$$\Delta = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}{r^3}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}$$

oder

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \quad \ldots \quad (118)$$

(118) auf $\frac{g_0}{2}$ angewandt, liefert:

$$\Delta\left(\frac{g_0}{2}\right) = \frac{g_0''}{2} + \frac{g_0'}{r},$$

so daß in erster Näherung

$$R_{00} = \frac{1}{g_1}\Delta\left(\frac{g_0}{2}\right) \quad \ldots \quad (119)$$

wird. Nun haben wir die erste Feldgleichung (110_1) durch Nullsetzen von R_{00} erhalten; sie geht daher in erster Näherung gemäß (119) über in

$$\Delta\left(\frac{g_0}{2}\right) = 0. \quad \ldots \quad (120)$$

[1]) Die Ableitungen nach den Koordinaten ϑ und φ werden als verschwindend angenommen.

Diese Gleichung entspricht in ihrer Bauart völlig der Laplaceschen Gleichung der klassischen Physik

$$\Delta V = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

in welcher V das Newtonsche Schwerepotential bedeutet. Indem wir nun mit Einstein diese beiden Gleichungen identifizieren, erscheint, wie schon am Ende von B. III. in Aussicht gestellt wurde, der physikalische Sinn der Feldgleichung (92′) enthüllt. Die Tragweite dieses Gedankenganges ist eine ganz außerordentliche, da durch ihn die Grundlage der Einsteinschen Gravitationstheorie, die Feldgleichungen der Schwere, gesichert ist und zwar der gestellten Anforderung gemäß dadurch, daß in erster Näherung der Anschluß an die Newtonsche Physik erzielt wird. So ist denn klar, daß $\frac{g_0}{2}$, dargestellt durch die Formel (115), nicht nur — abgesehen von einer additiven Konstanten — der äußeren Form nach, sondern auch seiner physikalischen Bedeutung nach dem Schwerepotentiale Newtons entspricht[1]). Dieses hat, wenn wir mit M die Newtonsche Masse des materiellen Zentrums und mit k^2 die Gaußsche Gravitationskonstante

$$k^2 = 6{\cdot}68 \,.\, 10^{-8}\, cm^3\, g^{-1}\, \text{sec}^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

bezeichnen, bekanntlich den Wert:

$$V = -k^2 \frac{M}{r}^{2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Sehen wir also im Hinblicke auf (115) von der additiven Konstanten $\frac{c^2}{2}$ ab, so muß

$$\frac{g_0}{2} = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

oder

$$-\frac{\alpha c^2}{2r} = -k^2 \frac{M}{r}$$

werden, woraus

$$\alpha = \frac{2 k^2 M}{c^2} = 1{\cdot}48 \,.\, 10^{-28}\, M\, cm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

folgt.[3]) Wir haben so durch eine Rechnung in erster Näherung die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten α ge-

[1]) Hierin liegt auch die Rechtfertigung des von Einstein gewählten Namens „Gravitationspotentiale“ für die Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform (68).

[2]) In Übereinstimmung mit der Elektrodynamik geben wir dem Potentiale der Schwerkraft als einer anziehenden Kraft das negative Vorzeichen.

[3]) M ist dabei in g-Massen auszudrücken.

funden, welche, wie aus (94), (122) und (125) hervorgeht, die Dimension einer Länge besitzt und als Gravitationsradius der Masse M bezeichnet wird.

Unsere nächsten Betrachtungen gelten den geometrischen Eigenschaften der „Welt“ eines isolierten Massenpunktes und insonderheit ihres räumlichen Bestandteiles. Ihr Bogenelementquadrat hat mit Rücksicht auf (102), (114) und (115) die Gestalt:

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \quad (126)$$

dessen räumlicher Teil

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \quad . \quad (127)$$

ist. Um die merkwürdigen geometrischen Verhältnisse dieses Schwerefeldes unserer Anschauung näher zu bringen, wollen wir nach dem Vorgange von L. Flamm[1]) einen Äquatorialschnitt durch diesen nichteuklidischen dreidimensionalen Raum betrachten, der durch die Bedingung

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

definiert sein soll. Wir erhalten so als Schnittfigur eine Fläche mit dem Bogenelementquadrat

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2\, d\varphi^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

das, wie ein Vergleich mit (24) zeigt, einer Rotationsfläche entspricht, deren Meridiankurve $z = f(r)$ durch die Differentialgleichung

$$1 + f'^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} = \frac{r}{r - \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

bestimmt erscheint, woraus sich

$$f' = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{r - \alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129')$$

und die Meridiankurve selbst

$$z = f(r) = \pm\int dr\sqrt{\frac{\alpha}{r - \alpha}} = \pm 2\sqrt{\alpha(r - \alpha)} \quad (130)$$

oder

$$z^2 = 4\alpha(r - \alpha)$$

[1]) L. Flamm, Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie, Physik. Zeitschrift, 17 (1916), S. 448.

ergibt. Es ist dies eine Parabel, deren Leitlinie die Rotationsachse der Fläche ist, mit dem Parameter $2p = 4\alpha$ (Abb. 13). Die zugehörige Drehfläche hat, bezogen auf die Cartesischen Koordinaten x, y, z, die aus (130) für $r^2 = x^2 + y^2$ folgende Gleichung

$$(z^2 + 4\alpha^2)^2 = 16\alpha^2(x^2 + y^2), \quad . \quad . \quad (131)$$

ist also von der 4. Ordnung. Sie ist hinsichtlich der auf ihr herrschenden Geometrie ein im euklidischen x-y-z-Raume entworfenes Bild der durch die Bedingung $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bestimmten nichteuklidischen Äquatorial„ebene“ des nichteuklidischen Gravitationsraumes (127). Da die Orientierung des Polarkoordinatensystemes r, ϑ, φ bei festgehaltenem Ursprunge offenbar willkürlich ist, so sind alle durch den Koordinatenursprung (Massenpunkt) gehenden „Ebenen“ untereinander gleichwertig und besitzen dieselbe, mit der Drehfläche (131) übereinstimmende Geometrie.

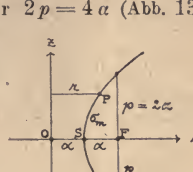


Abb. 13.

Wie aus Abb. 13 ersichtlich ist, erreicht der Beobachter den Massenpunkt, sobald $r = \alpha$ wird (Punkt S der Abb. 13). Der Kehlkreis der Drehfläche mit dem endlichen Umfange $2\alpha\pi$ stellt somit im euklidischen Bildraume den Ort des Massenpunktes auf jener nichteuklidischen „Ebene“ vor, welche dieser Drehfläche entspricht. Ziehen wir alle derartigen nichteuklidischen „Ebenen“ in Betracht, also den ganzen nichteuklidischen Gravitationsraum, so können wir sagen, daß als das euklidische Bild des Massenpunktes eine Kugel mit dem Halbmesser $R = \alpha$ erscheint, welche durch die Gesamtheit aller Kehlkreise um O (Abb. 13) erzeugt wird. Auf ihr haben wir uns die Materie des Massenpunktes ausgebreitet zu denken. Der euklidische Bildraum wird durch sie in zwei Hälften geschieden, deren eine das dem Beobachter unzugängliche „Innere“, deren andere das ihm allein zugängliche „Äußere“ des Massenpunktes darstellt.

Gehen wir auf der Rotationsfläche entlang der Meridiankurve über den Punkt S hinaus (Abb. 13), so nehmen die Werte von r wieder zu, d. h. wir entfernen uns von dem Massenpunkte, und zwar auf demselben Wege, auf dem wir uns ihm erst genähert. Dies bedeutet, daß die beiden Hälften der Drehfläche diesseits und jenseits des Kehlkreises in gleicher Weise Bilder derselben nichteuklidischen „Ebene“ sind. Der wirkliche nichteuklidische Gravitationsraum wird also auf den außerhalb der erwähnten

Massenpunktkugel ($R = \alpha$) gelegenen Teil unseres euklidischen Bildraumes, und zwar doppelt abgebildet.

Zur schärferen Beleuchtung der eigenartigen geometrischen Verhältnisse einer der genannten nichteuklidischen „Ebenen" mag als Beispiel die Kreismessung dienen. Aus der euklidischen Geometrie der Ebene ist uns allen wohlbekannt, daß das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines beliebig großen Kreises stets konstant $= \pi = 3{\cdot}141593\ldots$ ist. Dies gilt für die nichteuklidische „Ebene", wie wir leicht feststellen können, nicht mehr.

Wir wollen zu diesem Behufe konzentrische Kreise um den Massenpunkt betrachten und das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines beliebigen solchen Kreises untersuchen. Der vom Beobachter auf der nichteuklidischen „Ebene" gemessene Halbmesser desselben ist nicht r, sondern, wie aus Abb. 13 hervorgeht, die zum Werte r gehörige Bogenlänge σ_m der Meridiankurve der Drehfläche, gerechnet vom Punkte S, wo sich der das Kreiszentrum vorstellende Massenpunkt befindet. σ_m aber können wir im Hinblicke auf (24) und (129) folgendermaßen berechnen:

$$\sigma_m = \int_\alpha^r \frac{d\sigma_m}{dr}\,dr = \int_\alpha^r \sqrt{1+f'^2}\,dr = \int_\alpha^r dr\sqrt{\frac{r}{r-\alpha}} = \tag{132}$$

$$= \int_\alpha^r \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\alpha r}} = \left|\sqrt{r^2-\alpha r} + \frac{\alpha}{2} ln\left(2r-\alpha+2\sqrt{r^2-\alpha r}\right)\right|_\alpha^r$$

oder

$$\sigma_m = r\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}} + \frac{\alpha}{2} ln\left[\frac{r}{\alpha}\left(2-\frac{\alpha}{r}+2\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}}\right)\right]. \tag{132'}$$

Der Umfang des Kreises stimmt überein mit dem Umfange des zu r gehörigen Parallelkreises der Drehfläche, ist also gleich $2r\pi$. Mithin ergibt sich für das gesuchte Verhältnis der Wert:

$$\lambda = \frac{2r\pi}{2\sigma_m} = \pi\frac{r}{\sigma_m} =$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}} + \frac{\alpha}{2r} ln\left[\frac{r}{\alpha}\left(2-\frac{\alpha}{r}+2\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}}\right)\right]}, \tag{133}$$

der für $\lim \frac{\alpha}{r} = 0$, also für sehr große Werte von r in den euklidischen Wert übergeht:

$$\lim_{r=0} \lambda = \lim_{r=\infty} \lambda = \pi. \quad \ldots \quad (133')$$

Bei Annäherung an den Massenpunkt nimmt dagegen der Wert von λ beständig zu und strebt nach der Grenze Unendlich:

$$\lim_{r=\alpha} \lambda = \infty. \quad \ldots \quad (133'')$$

Für $r = \alpha$ wird die Maßbestimmung singulär.

In der Kreismessung besäßen wir somit ein Mittel, die Einsteinsche Gravitationstheorie an den geometrischen Verhältnissen in unserem Sonnensysteme zu prüfen, wenn wir imstande wären, Umfänge und Durchmesser verschieden großer, vor allem aber kleinerer Kreise um die Sonne zu vermessen und die erhaltenen λ-Werte miteinander zu vergleichen.

VII. Die Radialbewegung im Schwerefelde eines Massenpunktes.

Die geodätischen Weltlinien, deren mathematische Fassung, wie schon unter B. II, S. 43 ausgeführt wurde, den Newtonschen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik entspricht, sind in der Gravitationstheorie Einsteins der Ausdruck für die Gesetzmäßigkeit, der die Bewegung eines materiellen Punktes in der „Welt" unterliegt. Für die „Welt" eines isolierten Massenpunktes wollen wir im folgenden ihre besondere Form bestimmen, und zwar zunächst unter der vereinfachenden Annahme, daß die Bewegung nur in radialer Richtung stattfindet. Es ist dann stets

$$d\vartheta = d\varphi = 0,$$

bzw. mit Rücksicht auf (105)

$$dx_2 = dx_3 = 0$$

und aus (76) ergeben sich unter diesen Umständen für $i = 0,1$ die Differentialgleichungen der geodätischen Linien:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_0}{ds^2} + \Gamma^0_{00}\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 + 2\,\Gamma^0_{01}\,\frac{dx_0}{ds}\,\frac{dx_1}{ds} + \Gamma^0_{11}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 = 0, \\ \frac{d^2x_1}{ds^2} + \Gamma^1_{00}\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 + 2\,\Gamma^1_{01}\,\frac{dx_0}{ds}\,\frac{dx_1}{ds} + \Gamma^1_{11}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 = 0; \end{aligned}\right\} \quad (134)$$

für $i = 2,3$ sind zufolge (108) die Gleichungen (76) identisch erfüllt. Beachten wir (105) und (108), so folgt aus (134) weiter:

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{g_0'}{g_0}\,\frac{dt}{ds}\,\frac{dr}{ds} = 0, \quad \ldots \quad (135_1)$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{g_0'}{2g_1}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{g_1'}{2g_1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (135_2)$$

(135_1) läßt sich unmittelbar integrieren:

$$\frac{\frac{d^2t}{ds^2}}{\frac{dt}{ds}} = -\frac{g_0'}{g_0}\frac{dr}{ds}$$

oder

$$\frac{d}{ds} ln \frac{dt}{ds} = -\frac{d}{ds} ln\, g_0,$$

woraus wir das Integral erhalten:

$$ln \frac{dt}{ds} = ln\, A - ln\, g_0$$

oder

$$g_0 \frac{dt}{ds} = A \text{ (konst.)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

Um die Bedeutung der Integrationskonstanten A zu erkennen, berechnen wir mit Beachtung von (115) aus (126) und (127)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_0 - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

Durch Quadrieren von (136) und Einsetzen von (137) ergibt sich sodann:

$$\frac{g_0^2}{g_0 - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2} = A^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

Hierin kommt dem Ausdrucke $\frac{d\sigma}{dt}$ eine besondere physikalische Bedeutung zu. Im Hinblicke auf das zu Formel (97) Gesagte, das wegen $x_0 = t$ und des gleichen Sinnes von $d\sigma$ hier unverändert Anwendung findet, haben wir

$$\frac{d\sigma}{dt} = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

als Geschwindigkeit des bewegten Punktes aufzufassen.[1]) Setzen wir (139) in (138) ein und drücken g_0 gemäß (115) aus, so folgt:

[1]) (137) erscheint somit als Verallgemeinerung von (98).

$$A^2 = \frac{c^4\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2}{c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)-v^2} = c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left[1-\frac{v^2}{c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}\right]^{-1} =$$

$$= c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left[1+\frac{v^2}{c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}+\frac{v^4}{c^4\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2}+\ldots\right] \quad (140)$$

und in erster Näherung, indem wir berücksichtigen, daß im allgemeinen $\frac{v^2}{c^2}$ wegen des bedeutenden Betrages (94) der Lichtgeschwindigkeit c und ebenso $\frac{\alpha}{r}$ wegen der außerordentlichen Kleinheit von α — siehe die nummerischen Werte (144) — sehr kleine Größen darstellen:

$$A^2 = c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)+v^2 = c^2-\frac{\alpha c^2}{r}+v^2. \quad \ldots \quad (140')$$

Tragen wir hierin den Wert von α gemäß (125) ein, so wird schließlich:

$$\frac{A^2-c^2}{2} = -k^2\frac{M}{r}+\frac{v^2}{2} = -E, \quad \ldots \quad (140'')$$

wenn wir mit $-E$ die der Masseneinheit des bewegten Massenpunktes vom Standpunkte der klassischen Mechanik zukommende Gesamtenergie oder kurz dessen spezifische Gesamtenergie bezeichnen, die, nach dem Energiesatze (140″) von unveränderlichem Betrage, sich bekanntlich aus einem potentiellen Bestandteile $-k^2\frac{M}{r}$ und einem kinetischen $\frac{v^2}{2}$ zusammensetzt und infolge Überwiegens des ersteren zumeist wesentlich negativ ist. Wollen wir also den Anschluß an die Newtonsche Physik wahren, so müssen wir die Konstante

$$A^2 = c^2 - 2E^1). \quad \ldots \quad (140''')$$

setzen und gewinnen dann aus (138) und (139) die Formel:

$$g_0{}^2 = (c^2 - 2E)(g_0 - v^2),$$

[1]) Gleichung (136) bzw. (138) bedeutet also nichts anderes als den Energiesatz der Gravitationstheorie. Die Relation (140‴) gilt streng, wenn wir unter $-E$ in erster Näherung die spezifische Gesamtenergie der klassischen Mechanik verstehen.

aus der sich für die Geschwindigkeit v des materiellen Punktes der folgende Wert ergibt:

$$v = \sqrt{g_0\left(1 - \frac{g_0}{c^2 - 2E}\right)}.^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Mit Rücksicht auf (115) erhalten wir weiter:

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left[1 - \frac{\alpha c^2}{c^2 - 2E}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\right]}$$

oder

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\frac{\frac{\alpha c^2}{r} - 2E}{c^2 - 2E}}.^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad (141')$$

(135_2) gestattet mit Benützung von (136) die Berechnung von $\frac{dr}{ds}$, welcher Wert jedoch einfacher aus (126) mit Beachtung von (136), (115) und der Voraussetzung $d\vartheta = d\varphi = 0$ ermittelt werden kann. Er ist für unsere Zwecke ohne Belang.

Wir wollen zu dem oben gefundenen Ausdrucke (141) bzw. (141′) für die Geschwindigkeit v des radial bewegten Massenpunktes auch noch denjenigen für die vom Beobachter gemessene Radialbeschleunigung b bestimmen. Zu diesem Behufe drücken wir in (139) $\frac{d\sigma}{dt}$ mit Hilfe von (127) aus, indem wir voraussetzungsgemäß $d\vartheta = d\varphi = 0$ annehmen; wir finden so im Hinblicke auf (114):

$$\frac{dr}{dt}\sqrt{g_1} = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

Nun ist offenbar die gesuchte Radialbeschleunigung

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{v}{\sqrt{g_1}}\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{g_1}}\frac{d(v^2)}{dr}, \quad . \quad . \quad (143)$$

wenn wir uns der Formel (142) bedienen. Der letzte Ausdruck aber läßt sich aus (141) leicht berechnen:

$$\frac{d(v^2)}{dr} = g_0' - \frac{2g_0 g_0'}{c^2 - 2E} = g_0'\left(1 - \frac{2g_0}{c^2 - 2E}\right)$$

[1]) Es verdient im Hinblicke auf einen späteren Fall (Planetenbewegung) hervorgehoben zu werden, daß die Formel (141) bzw. (141′) sowie die ganze vorausgehende Darstellung auch für jede andere, nicht radial erfolgende Bewegung Gültigkeit besitzt, sofern nur die Gleichung (135_1) zutrifft.

und ergibt, in (143) eingesetzt:

$$b = \frac{g_0'}{2\sqrt{g_1}}\left(1 - \frac{2\,g_0}{c^2 - 2\,E}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (143')$$

Im Hinblicke auf (114) und (115) erhalten wir weiter

$$g_0' = \frac{c^2\,\alpha}{r^2}$$

und

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{c^2\,\alpha}{2\,r^2}\left[1 - \frac{2\,c^2}{c^2 - 2\,E}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\right]\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} =$$

$$= -\frac{c^2\,\alpha}{2\,r^2}\cdot\frac{c^2\left(1 - \frac{2\,\alpha}{r}\right) + 2\,E}{c^2 - 2\,E}\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \quad . \quad . \quad (143'')$$

Ehe wir in die Besprechung einzelner Fälle eintreten, sei eine Bemerkung allgemeiner Art vorausgeschickt. Sowohl v als auch b müssen reell sein. Demgemäß folgen aus (141) und (143) die Bedingungen:

$$g_0 \geqq 0, 1 - \frac{g_0}{c^2 - 2\,E} > 0, g_1 \geqq 0.$$

Die erste und dritte Ungleichung wird mit Rücksicht auf (114) und (115) erfüllt, sobald

$$1 - \frac{\alpha}{r} > 0 \text{ oder } r \geqq \alpha$$

ist. In Bezug auf die zweite Ungleichung müssen wir drei Fälle unterscheiden:

a) $c^2 - 2\,E > 0$ oder $E < \frac{c^2}{2}$.

Dann muß $g_0 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \leqq c^2 - 2\,E$

oder $r \leqq \frac{c^2\,\alpha}{2\,E}$ sein, wenn $E > 0$ ist. Bei negativem E genügen alle Werte $r \geq \alpha$.

b) $c^2 - 2\,E = 0$ oder $E = \frac{c^2}{2}$.

α) Ist $\lim c^2 - 2E = +0$ oder $\lim E = \frac{c^2}{2} - 0$, so wird die zweite Ungleichung mit Wahrung des stetigen Anschlusses an *α*) nur für $r = a$ erfüllt.

β) Ist dagegen $\lim c^2 - 2E = -0$ oder $\lim E = \frac{c^2}{2} + 0$, so wird der zweiten Ungleichung durch jeden Wert $r \geqq a$ genügt.

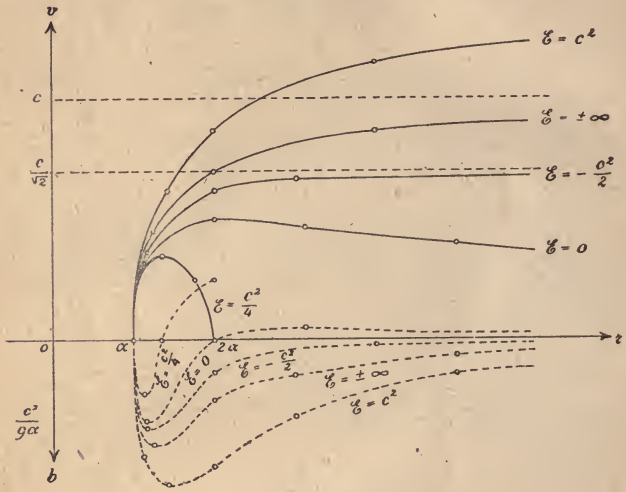


Abb. 14.

c) $c^2 - 2E < 0$ oder $E > \frac{c^2}{2}$.

Alle Werte $r \geqq a$ befriedigen die zweite Ungleichung.

Nun wollen wir unser Ergebnis an der Hand der Abb. 14 genauer diskutieren. Die Art der Bewegung des materiellen Punktes wird durch seinen spezifischen Energieinhalt $-E$ bestimmt. Demgemäß unterscheiden wir die folgenden Sonderfälle:

1. $E = -\infty$.

Die Formeln (141′) und (143″) vereinfachen sich zu:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{a}{r}}, \quad \ldots\ldots \quad (141_1')$$

$$b = \frac{c^2 \alpha}{2 r^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143''_1)$$

Fassen wir v und b als Funktionen von r ins Auge, so zeigt sich, daß, wie oben bemerkt, reelle Werte nur für $r > \alpha$ vorhanden sind und insbesondere

$$v_\alpha = 0, v_{2\alpha} = \frac{c}{\sqrt{2}} \sim 0{\cdot}7\,.\,c\,, \quad \lim_{r=\infty} v = c$$

ist. Die Geschwindigkeit steigt somit vom Werte Null für $r = \alpha$ stetig bis zur Vakuumlichtgeschwindigkeit c an, die in unendlicher (praktisch sehr großer) Entfernung vom Massenpunkte erreicht wird. Dabei ist zufolge $(143''_1)$

$$b_\alpha = 0, b_{2\alpha} = \frac{c^2}{8\alpha\sqrt{2}}, \quad \lim_{r=\infty} b = 0$$

mit einem Maximum bei $r = \frac{5\alpha}{4}$:

$$b_{\frac{5\alpha}{4}} = \frac{8c^2}{25\alpha\sqrt{5}} \qquad \left(v_{\frac{5\alpha}{4}} = \frac{c}{\sqrt{5}}\right).$$

Die Beschleunigung ist also beständig positiv, d. h. der bewegte Massenpunkt wird vom Zentrum stets abgestoßen. Diese Abstoßung wächst vom Werte Null bei $r = \alpha$ bis zu einem Höchstwerte bei $r = \frac{5\alpha}{4}$, um sodann asymptotisch wieder zum Nullwerte herabzusinken.

Dieser Fall gibt uns Aufschluß über die materielle Natur des Lichtes, auf welche schon beim Ansatze des Weltlinienelementes (102) hingewiesen wurde. Der Wert $(141'_1)$, welcher im Hinblicke auf (115) gleich $\sqrt{g_0}$ ist, charakterisiert die Lichtgeschwindigkeit im Schwerefelde genau so, wie sie der Wert c im gravitationsfreien Raume kennzeichnet. Vgl. die Formeln (101) und (102). Beim Verschwinden des Massenpunktes ($\alpha = 0$) und ebenso in unendlicher Entfernung von demselben ($r = \infty$) geht $(141'_1)$ in den Wert c über. Es ist noch hervorzuheben, daß $(141'_1)$ mit Rücksicht auf den allgemeinen Charakter der Ableitung von (141) bzw. (141′) für im Schwerefelde ganz beliebig verlaufende Lichtstrahlen gilt.

2. $E = -\frac{c^2}{2}$.

Aus (141′) und (143″) folgt:

$$v = \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{r^2}}, \quad \ldots \quad (141'_2)$$

$$b = \frac{c^2\alpha^2}{2r^3}\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}} \quad \ldots \quad (143''_2)$$

Im besonderen wird:

$$v_\alpha = 0,\ v_{2\alpha} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sim 0{\cdot}6\,.\,c,\ \lim_{r=\infty} v = \frac{c}{\sqrt{2}} \sim 0{\cdot}7\,.\,c;$$

$$b_\alpha = 0,\ b_{2\alpha} = \frac{c^2}{16\,\alpha\sqrt{2}},\ \lim_{r=\infty} b = 0$$

mit einem Maximum bei $r = \frac{7\alpha}{6}$ im Betrage

$$b_{\frac{7\alpha}{6}} = \frac{108\,c^2}{343\,\alpha\sqrt{7}} \qquad \left(v_{\frac{7\alpha}{6}} = \frac{c\sqrt{13}}{7\sqrt{2}}\right).$$

Auch in diesem Falle nimmt die Geschwindigkeit des Beweglichen vom Werte Null für $r = \alpha$ andauernd zu, erreicht jedoch im Unendlichen nur mehr den Betrag $\frac{c}{2}\sqrt{2}$. Die Beschleunigung ist noch durchwegs positiv, also ständig Abstoßung vorhanden, ihr Höchstwert hat aber im Vergleiche mit Fall 1 abgenommen und ist näher gegen die Zentralmasse gerückt.

3. $E = 0$.

Dazu ergibt sich aus (141′) und (143″):

$$v = c\sqrt{\frac{\alpha}{r}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)}, \quad \ldots \quad (141'_3)$$

$$b = -\frac{c^2\alpha}{2r^2}\left(1-\frac{2\alpha}{r}\right)\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}} \quad \ldots \quad (143''_3)$$

Insbesondere erhalten wir

$$v_\alpha = 0, \quad \lim_{r=\infty} v = 0$$

mit einem Maximum bei $r = 2\alpha$:

$$v_{2\alpha} = \frac{c}{2};$$

ferner

$$b_\alpha = 0,\ b_{2\alpha} = 0, \quad \lim_{r=\infty} b = 0$$

mit einem Maximum bei $r \sim \frac{9\alpha}{8}$:

$$b_{\frac{9\alpha}{8}} \sim \frac{c^2}{9\alpha} \qquad \left(v_{\frac{9\alpha}{8}} = \frac{2c\sqrt{2}}{9}\right)$$

und einem Minimum bei $r \sim \frac{25\alpha}{8}$:

$$b_{\frac{25\alpha}{8}} \sim -\frac{c^2}{64\alpha} \qquad \left(v_{\frac{25\alpha}{8}} = \frac{2c\sqrt{34}}{25}\right).$$

Das Bewegliche wird bis zum Werte $r = 2\alpha$ abgestoßen, und zwar erst zunehmend bis $r \sim \frac{9\alpha}{8}$, dann abnehmend bis $r = 2\alpha$, wodurch es die Höchstgeschwindigkeit $\frac{c}{2}$ erlangt. Darüber hinaus verwandelt sich die Abstoßung in Anziehung, die in der Entfernung $r \sim \frac{25\alpha}{8}$ ihr Maximum erreicht und darauf asymptotisch gegen den Wert Null abnimmt; sie vermindert stetig die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, der schließlich im Unendlichen zur Ruhe kommt.

4. $E = \frac{c^2}{4}$.

Aus (141′) und (143″) gewinnen wir:

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{2\alpha}{r} - 1\right)}, \quad \ldots \quad (141'_4)$$

$$b = -\frac{c^2\alpha}{2r^2}\left(3 - \frac{4\alpha}{r}\right)\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}. \quad \ldots \quad (143''_4)$$

v ist nur mehr im Bereiche $\alpha \leqq r \leqq 2\alpha$ reell und es ist insbesondere:

$$v_\alpha = 0, \; v_{2\alpha} = 0$$

mit einem Maximum bei $r = \frac{4\alpha}{3}$:

$$v_{\frac{4\alpha}{3}} = \frac{c}{2\sqrt{2}}.$$

Ferner ist gemäß $(143''_4)$:

$$b_\alpha = 0, \; b_{\frac{4\alpha}{3}} = 0, \; b_{2\alpha} = -\frac{c^2}{8\alpha\sqrt{2}}$$

mit einem Maximum bei $r \sim \frac{13\alpha}{12}$:

$$b_{\frac{13\alpha}{12}} \sim \frac{c^2}{12\alpha} \qquad \left(v_{\frac{13\alpha}{12}} = \frac{c\sqrt{11}}{13}\right).$$

Auf den bewegten Punkt wirkt bis zum Werte $r = \frac{4\alpha}{3}$ eine abstoßende Kraft, deren Stärke zuerst vom Betrage Null bis zu einem Höchstwerte bei $r \sim \frac{13\alpha}{12}$ wächst und sodann wieder zum Betrage Null bei $r = \frac{4\alpha}{3}$ herabsinkt; das Bewegliche erreicht dadurch die maximale Geschwindigkeit $\frac{c}{2\sqrt{2}}$. Über $r = \frac{4\alpha}{3}$ hinaus erfolgt zunehmende Anziehung, bis der bewegte Punkt in der Entfernung $r = 2\alpha$ zur Ruhe gelangt. Infolge der daselbst vorhandenen Anziehung tritt jedoch sofort die umgekehrte Bewegung ein, der Körper fällt gegen das Massenzentrum zurück.

5. $E = \frac{c^2}{2}$.

Wie schon oben hervorgehoben wurde, haben wir die Grenzübergänge zu unterscheiden:

α) $\lim E = \frac{c^2}{2} - 0$. Der Bereich, in welchem v reelle Werte besitzt, schrumpft auf den Punkt $r = \alpha$ zusammen; die zugehörigen Werte von v und b werden unbestimmt und können mit Wahrung der Stetigkeit des Überganges gleich Null gesetzt werden: $v_\alpha = b_\alpha = 0$. Eine Bewegung kommt also überhaupt nicht zustande.

β) $\lim E = \frac{c^2}{2} + 0$. v und b werden für alle Werte $r > \alpha$ unstetig (unendlich groß), für $r = \alpha$ werden sie unbestimmt und können wie unter α) gleich Null gesetzt werden.

6. $E = c^2$.

(141′) und (143″) nehmen folgende Gestalt an:

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(2 - \frac{\alpha}{r}\right)}, \quad \ldots \quad (141'_6)$$

$$b = \frac{c^2 \alpha}{2 r^2} \left(3 - \frac{2\alpha}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad (143''_6)$$

Insbesondere ergeben sich die Werte:

$$v_\alpha = 0, \; v_{2\alpha} = \frac{c\sqrt{3}}{2} \sim 0{\cdot}9\,.\,c, \quad \lim_{r \; \infty} v = c\sqrt{2};$$

$$b_\alpha = 0, \; b_{2\alpha} = \frac{c^2}{4\alpha\sqrt{2}}, \quad \lim_{r=\infty} b = 0$$

mit einem Maximum bei $r \sim \frac{17\alpha}{12}$:

$$b_{\frac{17\alpha}{12}} \sim \frac{c^2}{5\alpha} \qquad \left(v_{\frac{17\alpha}{12}} = \frac{c\sqrt{110}}{17}\right).$$

Der bewegte Punkt erfährt eine andauernde Abstoßung, welche bei $r \sim \frac{17\alpha}{12}$ ihren Höchstwert erreicht, und kommt im Unendlichen mit der Überlichtgeschwindigkeit $c\sqrt{2}$ an.

7. $E = +\infty$.

Identisch mit Fall 1.

Zusammenfassend stellen wir somit fest:

a) $E \leqq -\frac{c^2}{2}$ und $E > \frac{c^2}{2}$.

Es tritt beständig Abstoßung ein und das Bewegliche gelangt im ersteren Falle mit Unter-, im letzteren mit Überlichtgeschwindigkeit, im Grenzfalle $E = \pm\infty$ mit Lichtgeschwindigkeit ins Unendliche.

b) $-\frac{c^2}{2} < E \leqq 0$.

Der bewegte Punkt wird anfänglich abgestoßen, später jedoch angezogen und erreicht mit einer Geschwindigkeit kleiner als $\frac{c}{\sqrt{2}}$, im Grenzfalle $E = 0$ mit der Geschwindigkeit Null das Unendliche.

c) $0 < E \leqq \frac{c^2}{2}$.

Die Bewegung ist auf ein endliches Gebiet beschränkt. Wie im Falle *b)* erfährt das Bewegliche erst Abstoßung vom Massen-

zentrum und darauf Anziehung, welche es jedoch schon in endlicher Entfernung vom Zentrum zur Ruhe bringt, worauf sich die Bewegung umkehrt. In diese Gruppe gehören augenscheinlich die praktisch wichtigen Fälle aus dem Gebiete der Mechanik: der freie Fall und der vertikale Wurf. Die Einsteinsche Darstellung weicht aber von der klassischen vor allem darin ab, daß sie eine anfängliche Abstoßung des Beweglichen lehrt, die der letzteren fremd ist. Ein materieller Punkt wird, wie aus (143″) hervorgeht, im Bereiche

$$\alpha \leq r < \frac{2\,c^2\,\alpha}{c^2 + 2\,E} < 2\,\alpha$$

von der Zentralmasse abgestoßen, wobei die obere Grenze des Bereiches jedoch höchstens den Wert $2\,\alpha$ annimmt (Grenzfall $E = 0$). Es ist daher von besonderem Interesse festzustellen, welche Ausdehnung dieses Gebiet im Schwerefelde der Erde bzw. der Sonne hat. Die Rechnung gestaltet sich im Hinblick auf Formel (125) sehr einfach und ergibt für die Erde

$$M_E = 6{\cdot}021\,.\,10^{27}\,g,\quad \alpha_E = 0{\cdot}891\,cm \backsim 9\,mm; \qquad (144_1)$$

für die Sonne

$$M_S = 333430\,M_E = 2{\cdot}008\,.\,10^{33}\,g,\quad \alpha_S = 2{\cdot}97\,km \backsim 3\,km. \qquad (144_2)$$

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich, daß die von der Einsteinschen Theorie geforderte Abstoßung auf Bereiche beschränkt ist, die unserer Beobachtung unzugänglich sind und für welche insbesondere die Fiktion einer punktförmigen Zentralmasse ganz und gar nicht zutrifft, da sie zu tiefst im Innern der in Wirklichkeit endlich ausgebreiteten Massen liegen. Im Erfahrungsgebiete der Astronomie und der irdischen Physik wird vielmehr immer $r >> \alpha$ und zugleich $E << c^2$ sein — siehe die obigen Ausführungen, Fall *c)* und Abb. 14 — so daß wir, wie dies schon früher auf S. 67 geschehen ist, $\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{E}{c^2}$ als sehr kleine Größen 1. Ordnung betrachten dürfen. Unter dieser Voraussetzung aber folgt aus (143″), nachdem wir Zähler und Nenner des zweiten Bruches durch c^2 dividiert haben:

$$b \backsim -\frac{c^2\,\alpha}{2\,r^2}\left(1 - \frac{2\,\alpha}{r} + \frac{2\,E}{c^2}\right)\left(1 + \frac{2\,E}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{2\,r}\right) \backsim$$

$$\backsim -\frac{c^2}{2\,r}\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{5\,\alpha^2}{2\,r^2} + \frac{4\,E\,\alpha}{c^2\,r}\right)$$

und somit in erster Näherung, indem wir noch von Formel (125) Gebrauch machen:

$$b = -\frac{c^2 \alpha}{2 r^2} = -k^2 \frac{M}{r^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

der bekannte Newtonsche Wert der Schwerebeschleunigung. Wegen der im Vergleiche mit α praktisch immer außerordentlich großen Werte von r können die Abweichungen von dem Näherungswerte (145) nur derart gering sein, daß sie sich jeder direkten Beobachtung entziehen müssen.

VIII. Die Planetenbewegung vom Standpunkte der Gravitationstheorie Einsteins.

Wir stellen zunächst das Differentialgleichungssystem der geodätischen Linien in seiner allgemeinsten Gestalt auf, wie es sich aus (76) für das Schwerefeld eines einzigen Massenpunktes unter Zugrundelegung der Polarkoordinaten r, ϑ, φ, genauer des Weltlinienelementes (102) ergibt. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur die Γ^i_{kl} gemäß (108) auszudrücken und die Festsetzung (105) zu beachten; wir erhalten dann:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{g_0'}{g_0} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146_1)$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{g_0'}{2 g_1} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{g_1'}{2 g_1} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{r}{g_1} \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 - \frac{r}{g_1} \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0, \quad (146_2)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0, \quad . \quad (146_3)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \cot \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (146_4)$$

Physikalisch gedeutet, ist dies das System der Bewegungsgleichungen, denen jeder Vorgang im Schwerefelde des Massenzentrums unterworfen ist.

Gleichung (146_1) ist durchaus identisch mit Gleichung (135_1), so daß wir schließen dürfen, daß das dort gefundene Energieintegral (136)

$$g_0 \frac{dt}{ds} = A = \sqrt{c^2 - 2E}^{1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

ganz allgemeine Gültigkeit besitzt. Vgl. die Fußnote auf S. 68.

Da es unser Ziel ist, jene gravitationstheoretischen Formeln zu gewinnen, welche den Keplerschen Gesetzen der klassischen

[1]) Siehe die Formel (140‴) auf S. 67.

Mechanik entsprechen, müssen wir das Gleichungssystem (146_2) bis (146_4) auf jenen Fall einschränken, der die Planetenbewegung auszeichnet. Diese findet bekanntlich in einer Ebene statt, in der sich auch die Zentralmasse befindet. An die Stelle dieser euklidischen Bahnebene der klassischen Physik tritt jetzt eine durch das Massenzentrum gehende nichteuklidische „Ebene", deren Bild die unter B. VI. besprochene Drehfläche ist. Wir haben also jene Bewegung zu ermitteln, die sich in einer solchen nichteuklidischen „Ebene" abspielt. Zu diesem Behufe betrachten wir den Äquatorialabschnitt

$$\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

für welchen unter Beachtung des Umstandes, daß dann

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d^2\vartheta}{ds^2} = 0$$

wird, die Gleichungen (146_2) bis (146_4) die vereinfachte Form annehmen:

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{g_0'}{2g_1}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{g_1'}{2g_1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{r}{g_1}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0, \quad . \quad (148_1)$$

$$(146_3) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (148_2)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (148_3)$$

(148_3) zeigt denselben Bau wie (146_1) bzw. (135_1), läßt sich also nach demselben Verfahren integrieren. Die Rechnung ergibt

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = B\,(\text{konst.}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

als Integral von (148_3). Dies ist augenscheinlich der Flächensatz, jedoch in gravitationstheoretischer Gestalt. In der Newtonschen Physik hat er die bekannte Form:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = C\,(\text{konst.}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

und besagt, daß die Flächengeschwindigkeit $\frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt}$ einen konstanten Wert behält. Um den Zusammenhang mit (149) herzustellen, bedienen wir uns der aus (115), (137) und (139) folgenden Relation:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - v^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

aus welcher sich in erster Näherung, indem wir wieder $\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{v^2}{c^2}$ als kleine Größen 1. Ordnung betrachten,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{c}\left(1 + \frac{\alpha}{2r} + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

ergibt. Mit Benützung dieses Näherungswertes folgern wir aus (149)

$$B = r^2 \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds} \sim \frac{r^2}{c}\frac{d\varphi}{dt}\left(1 + \frac{\alpha}{2r} + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

und unter Beachtung des Umstandes, das wir auch $\frac{r}{c}\frac{d\varphi}{dt}$ als eine kleine Größe zu bewerten haben, erhalten wir in erster Näherung:

$$B = \frac{r^2}{c}\frac{d\varphi}{dt}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (151)$$

woraus im Zusammenhalte mit (150)

$$B = \frac{C}{c}^{1}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (152)$$

hervorgeht. Führen wir diesen Wert in (149) ein, so wird

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{C}{c}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (153)$$

wobei C in erster Näherung die doppelte Flächengeschwindigkeit im Sinne der klassischen Mechanik bedeutet.

Indem wir des weiteren die Integration von (148_1) umgehen, ziehen wir für die folgende Rechnung das Weltlinienelement in der Form heran:

$$ds^2 = g_0\, dt^2 - g_1\, dr^2 - r^2\, d\varphi^2, \quad \ldots \quad (154)$$

welche sich aus (102) für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ergibt. Die Division durch ds^2 liefert:

$$1 = g_0\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - g_1\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

und im Hinblicke auf (147) und (153) folgt daraus:

$$1 = \frac{c^2 - 2E}{g_0} - g_1\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{C^2}{c^2 r^2}$$

[1]) Diese Gleichung gilt streng, wenn wir fürderhin unter C eine Konstante verstehen, mit der die Konstante des klassischen Flächensatzes (150) bloß in erster Näherung übereinstimmt.

oder

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{\frac{1}{g_1}\left(\frac{c^2 - 2E}{g_0} - \frac{C^2}{c^2 r^2} - 1\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

Wir eliminieren die Eigenzeit ds, indem wir (153) durch (155) dividieren:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C}{c r^2 \sqrt{\frac{1}{g_1}\left(\frac{c^2 - 2E}{g_0} - \frac{C^2}{c^2 r^2} - 1\right)}} \quad . \quad . \quad (156)$$

und haben damit die gesuchte Differentialgleichung der Planetenbahnen vom Standpunkte der Gravitationstheorie Einsteins gefunden, wenn wir g_0 und g_1 gemäß (115) ausdrücken. Wir tun dies und führen zugleich die reziproke Entfernung ϱ durch die Formeln ein:

$$\varrho = \frac{1}{r}, \quad d\varrho = -\frac{dr}{r^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157)$$

$$\frac{g_0}{c^2} = \frac{1}{g_1} = 1 - \alpha\varrho. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

(156) geht dann über in

$$d\varphi = -\frac{C\,d\varrho}{c\sqrt{\frac{c^2 - 2E}{c^2} - \frac{C^2}{c^2}\varrho^2(1 - \alpha\varrho) - 1 + \alpha\varrho}}$$

oder

$$d\varphi = -\frac{d\varrho}{\sqrt{\alpha\varrho^3 - \varrho^2 + \frac{c^2\alpha}{C^2}\varrho - \frac{2E}{C^2}}}. \quad . \quad (159)$$

Die unter dem Wurzelzeichen stehende Funktion dritten Grades in bezug auf ϱ wollen wir uns in Faktoren zerlegt denken:

$$\begin{aligned} f(\varrho) &= \alpha(\varrho_0 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho)(\varrho - \varrho_2) = \\ &= \alpha[\varrho^3 - (\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2)\varrho^2 + \\ &\quad + (\varrho_0\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2 + \varrho_2\varrho_0)\varrho - \varrho_0\varrho_1\varrho_2]. \quad . \quad . \quad . \quad (160) \end{aligned}$$

Die Lage der Wurzeln ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 und den Verlauf der Funktion $f(\varrho)$, wie sie annähernd den astronomischen Verhältnissen entsprechen, veranschaulicht Abb. 15. Für die Ermittlung der Planetenbahn kommt nur das Intervall (ϱ_2, ϱ_1) mit positiven Werten der Funktion $f(\varrho)$ als Integrationsbereich in Betracht und es ist ohneweiters klar, daß die Extremwerte ϱ_1 und ϱ_2

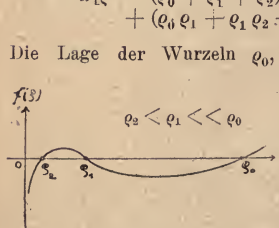


Abb. 15.

den Reziprokwerten des kleinsten und größten Radiusvektors r_1 und r_2 des Planeten in der klassischen Physik entsprechen müssen. Wir wollen sie ihnen in der Tat formal gleichsetzen und überdies noch die bekannten Formeln

$$\varrho_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{1+\varepsilon}{p}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{1-\varepsilon}{p} \quad . \quad . \quad (161)$$

der klassischen Theorie entlehnen, welche hier als Definitionsgleichungen für den Parameter $2p$ und die numerische Exzentrizität ε der Bahn zu gelten haben. Aus (161) berechnen wir vorerst

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2}{p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162)$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von ϱ^2 in den Formeln (159) und (160) gelangen wir zu der Gleichung:

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

aus welcher im Hinblicke auf (162)

$$\varrho_0 = \frac{1}{\alpha} - (\varrho_1 + \varrho_2) = \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{p} \quad . \quad . \quad . \quad (164)$$

folgt, ein wegen der Kleinheit von α außerordentlich großer Wert.

Um die Integration von (159) — es handelt sich um ein elliptisches Integral 1. Gattung — näherungsweise bequem durchführen zu können, ersetzen wir wie in der Newton'schen Theorie ϱ durch eine neue Veränderliche ψ:

$$\varrho - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} \cos\psi, \; d\varrho = -\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} \sin\psi \, d\psi \; . \; (165)$$

(159) nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$d\varphi = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} \sin\psi \, d\psi \left[\alpha\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\cos\psi\right) \cdot \left(\varrho_1 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\cos\psi\right)\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} + \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\cos\psi - \varrho_2\right)\right]^{-1/2} =$$
$$= \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} \sin\psi \, d\psi \left[\alpha\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\cos\psi\right)\right]^{-1/2} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\right)^{-1} \left[(1 - \cos\psi)(1 + \cos\psi)\right]^{-1/2}$$

oder

$$d\varphi = \left[\alpha\left(\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\cos\psi\right)\right]^{-1/2} d\psi \quad . \quad (166)$$

Wir berechnen noch mit Hilfe von (162) und (163), bzw. (161):

$$\varrho_0 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = (\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2) - \frac{3}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) = \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{p}, \quad (167)$$

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \frac{2\varepsilon}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (168)$$

und erhalten so endlich

$$d\varphi = \left[\alpha\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{3}{p} - \frac{\varepsilon}{p}\cos\psi\right)\right]^{-1/2} d\psi = \frac{\sqrt{p}\, d\psi}{\sqrt{p - 3\alpha - \alpha\varepsilon\cos\psi}}. \quad (169)$$

Zur näherungsweisen Integration von (169) beschränken wir uns auf den für die astronomischen Verhältnisse der Planetenbahnen zutreffenden Fall:

$$\varepsilon << 1^1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

der uns erlaubt, $\alpha\varepsilon\cos\psi$ gegenüber 3α zu vernachlässigen, wodurch sich aus (169) angenähert

$$d\varphi = \sqrt{\frac{p}{p - 3\alpha}}\, d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

ergibt. (171) läßt sich unmittelbar integrieren:

$$\varphi - \varphi_0 = \psi\sqrt{\frac{p}{p - 3\alpha}}, \quad \varphi_0 = \text{Integrationskonstante}; \quad (172)$$

mit Rücksicht auf (165), (162) und (168) folgt sodann weiter:

$$\left.\begin{aligned}(\varphi - \varphi_0)\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{p}} = \psi = \arccos\frac{2\varrho - (\varrho_1 + \varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2} = \\ = \arccos\frac{2\varrho - \frac{2}{p}}{\frac{2\varepsilon}{p}} = \arccos\frac{\varrho p - 1}{\varepsilon}\end{aligned}\right\} \quad (173)$$

oder

$$\varrho p - 1 = \varepsilon\cos\left[(\varphi - \varphi_0)\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{p}}\right] \quad . \quad . \quad (174)$$

Drücken wir schließlich ϱ gemäß (157) durch r aus, so finden wir die gesuchte Bahngleichung:

[1]) Unter den Planetenbahnen hat die Merkurbahn die größte numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0{\cdot}206$.

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\left(\varphi \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{p}}\right)}, \quad \ldots \quad (175)$$

wobei die Integrationskonstante $\varphi_0 = 0$ gesetzt, also angenommen ist, daß die Zählung der Koordinate φ beim Perizentrum (Perihel)

$$r_1 = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad \ldots \quad (176)$$

beginnt.

Die Formel (175) unterscheidet sich von der Kepler'schen Bahngleichung der klassischen Mechanik

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \ldots \quad (177)$$

nur durch den Faktor $\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{p}}$, mit dem das Azimut φ behaftet erscheint, der aber wegen der außerordentlichen Kleinheit von $\frac{\alpha}{p}$ jedenfalls sehr wenig von 1 verschieden ist. Immerhin macht sich sein Einfluß, wie wir im folgenden genauer feststellen werden, für den sonnennächsten Planeten Merkur in deutlicher Weise bemerkbar. Wir wollen daher seiner physikalischen Bedeutung nachgehen und untersuchen, wann der Planet abermals ins Perizentrum (Perihel) gelangt. Dies wird der Fall sein, wenn r wieder den Wert (176) annimmt, also für

$$\varphi \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{p}} = 2\pi$$

oder

$$\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{p}}} = 2\pi \left(1 + \frac{3\alpha}{2p} + \ldots\right) \sim 2\pi + \frac{3\alpha\pi}{p}, \quad (178)$$

wenn wir die Glieder zweiter und höherer Ordnung in $\frac{\alpha}{p}$ im Sinne der angestrebten ersten Näherung vernachlässigen. (178) bringt somit eine Vorrückung des Perizentrums (Perihels) im Betrage

$$\Delta = \frac{3\alpha\pi}{p} = \frac{3\alpha\pi}{a(1-\varepsilon^2)} \overset{1)}{=} \frac{3\alpha \cdot 180 \cdot 60^2{}''}{a(1-\varepsilon^2)} \text{ (Bogensekunden)} \quad (179)$$

pro Umlauf zum Ausdruck.

[1]) Nach einer bekannten Formel gilt für eine Ellipse: $p = a(1-\varepsilon^2)$, wobei a die große Halbachse bedeutet.

Um uns von der Natur dieser Erscheinung ein klares Bild zu machen, wollen wir in (175) die Substitution vornehmen:

$$\bar{\varphi} = \varphi \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{p}}, \quad \ldots \ldots \quad (180)$$

wodurch (175) in die Keplerbahn (177) übergeführt wird. Gehen wir daher umgekehrt von einer solchen aus, so erhalten wir dadurch, daß wir den zu einem bestimmten Werte von $\bar{\varphi}$ gehörigen r-Wert einem anderen Azimut

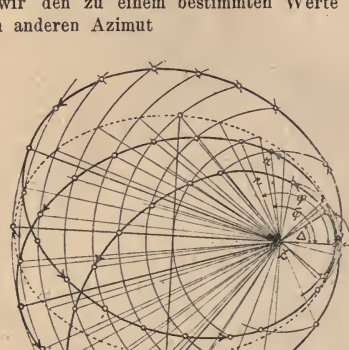


Abb. 16.

$$\varphi = \frac{\bar{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{p}}} \sim \left(1 + \frac{3\alpha}{2p}\right)\bar{\varphi}. \quad \ldots \ldots \quad (180')$$

zuordnen, die geänderte Planetenbahn mit Perizentrumvorrückung. Nach diesem Verfahren ist Abb. 16 entworfen, für welche $\frac{3\alpha}{2p} = \frac{1}{10}$, also verhältnismäßig sehr groß gewählt wurde, sodaß sich $\Delta = \frac{\pi}{5} = 36^0$ ergibt.

Wir wollen nun die numerische Auswertung der Perihelvorrückung für den Planeten Merkur vollständig durchführen, zumal deren mit der Erfahrung gut übereinstimmendes Ergebnis die

stärkste Stütze der Einstein'schen Gravitationstheorie darstellt. Für den Merkur ist

$$a = 0{\cdot}3871 \text{ Erdbahnhalbmesser} = 0{\cdot}3871 \,.\, 149{\cdot}48 \,.\, 10^6 km,$$
$$\varepsilon = 0{\cdot}2056,$$
$$1 - \varepsilon^2 = 0{\cdot}9577;$$

ferner zufolge (144_2)

$$\alpha_S = 2{\cdot}97\ km.$$

Die Ausrechnung nach Formel (179) liefert:

$$\Delta = 0{\cdot}104''$$ pro Umlauf

und da die siderische Umlaufszeit des Merkurs 0·2408 Jahre beträgt, entfällt auf ein Jahrhundert eine Perihelvorrückung im Ausmaße von

$$0{\cdot}104'' \cdot \frac{100}{0{\cdot}2408} = 43{\cdot}2''.$$

Aus der Beobachtung fand Newcomb[1]) $41{\cdot}24'' \pm 2{\cdot}09''$, womit der Einstein'sche Wert sehr gut übereinstimmt.

Neben Merkur käme für eine Prüfung der Formel (179) noch der der Sonne zweitnächste Planet Venus in Betracht; doch scheitert eine solche Erprobung an dem Umstande, daß infolge der außerordentlich kleinen Exzentrizität 0·0068 das Perihel des Planeten nicht mit genügender Genauigkeit ermittelt werden kann.

Für die Erde ($\varepsilon = 0{\cdot}0167$), die sich schon in zu großer Sonnenferne befindet, ergibt die Rechnung den sehr kleinen, auch mit den feinen Beobachtungsmitteln der Astronomie nicht feststellbaren Betrag von $3{\cdot}9''$ für die Perihelvorrückung im Jahrhundert. Aus demselben Grunde scheiden umsomehr auch die übrigen Planeten bei einer Prüfung von (179) aus.

IX. Die Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerefelde eines Massenpunktes.

Vom Standpunkte der Gravitationstheorie Einsteins haben wir die Lichtausbreitung als einen materiellen Vorgang aufzufassen. Dies geht schon aus den Ausführungen des Abschnittes VII., 1. Sonderfall, S. 70f., klar hervor, denen zufolge die Lichtgeschwindigkeit im Schwerefelde

$$v = \sqrt{g_0} = c\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

als Funktion des Gravitationsradius α der Zentralmasse erscheint. Wir haben dort gesehen, daß sich ein Lichtstrahl wie ein bewegter materieller Punkt verhält, dem eine unendlich große

[1]) S. Newcomb, Wash. Astr. pap. 6 (1898), S. 108.

spezifische Gesamtenergie — E zukommt. Demgemäß ist die Frage nach der Bahn eines Lichtstrahles vom Standpunkte der Gravitationstheorie von derselben Art wie die nach der Bahn eines beliebigen (im gewöhnlichen Sinne) materiellen Körpers, die im vorhergehenden Abschnitte VIII für den Fall einer „ebenen" Bewegung bereits allgemein gelöst wurde. Es müßte also genügen, die dortigen Ergebnisse auf den für den Lichtstrahl charakteristischen Fall $E = \pm\infty$ anzuwenden. Ein Blick auf die für die Bahnbestimmung in Betracht kommende Gleichung (156) bzw. (159) lehrt jedoch, daß für diesen Grenzfall Unstetigkeit eintritt und ebendiese Formeln daher unbrauchbar werden. Der eigentliche Grund hiefür liegt darin, daß für einen Vorgang, der sich mit der Geschwindigkeit (181) abspielt, im Hinblicke auf die Formeln (154), (137) und (139)

$$ds^2 = g_0\,dt^2 - g_1\,dr^2 - r^2\,d\varphi^2 = g_0\,dt^2 - v^2\,dt^2 = 0 \qquad (182)$$

wird. Dies besagt, daß unter allen materiellen Vorgängen die Lichtausbreitung dadurch gekennzeichnet ist, daß ihre Eigenzeit ds verschwindet. Wir erkennen daraus, daß auf einen Lichtstrahl Energie- und Flächensatz in der Form (147) bzw. (149) keine Anwendung finden und daß insbesondere an die Stelle des ersteren Gleichung (182) tritt. Um für den letzteren einen geeigneten Ausdruck zu gewinnen, müssen wir auf das Differentialgleichungsysstem der geodätischen Linien (146_1) und (148_1) bis (148_3) zurückgreifen.

Wir gehen darauf aus, die Eigenzeit ds zu eliminieren. Dies gelingt folgendermaßen. Offenbar ist:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{ds};$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}.$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke in (148_3) ergibt:

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = 0.$$

Aus dieser Gleichung entfernen wir $\frac{d^2t}{ds^2}$ mit Hilfe von (146_1):

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{g_0'}{g_0}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = -\frac{g_0'}{g_0}\frac{dr}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2;$$

wir erhalten so:

$$\left[\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{g_0'}{g_0}\right)\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0,$$

und da $\frac{dt}{ds} \neq 0$, im vorliegenden Falle sogar unendlich groß ist, muß

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{g_0'}{g_0}\right)\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (183)$$

sein. Die Integration von (183) läßt sich ganz ebenso wie die von (135_1) und (148_3) durchführen — man dividiert zuerst durch $\frac{d\varphi}{dt}$ — und liefert den Flächensatz in der von der Eigenzeit unabhängigen Form:

$$\frac{r^2}{g_0}\frac{d\varphi}{dt} = D \text{ (konst.)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (184)$$

Anderseits folgt aus (182)

$$g_1\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = g_0 - r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

und mit Benützung von (184)

$$g_1\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = g_0 - \frac{D^2 g_0^2}{r^2}$$

oder

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{g_0}{g_1}\left(1 - \frac{D^2 g_0}{r^2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (185)$$

Die Division von (184) durch (185) liefert sodann die gesuchte Differentialgleichung der Lichtstrahlbahn:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{D\sqrt{g_0 g_1}}{r^2\sqrt{1 - \frac{D^2 g_0}{r^2}}}$$

oder mit Rücksicht auf (112′)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{c\,D}{r^2\sqrt{1 - \frac{D^2 g_0}{r^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)$$

Die Einführung der reziproken Entfernung ϱ durch die Formeln (157) und (158) wie im Abschnitte VIII ergibt schließlich:

$$d\varphi = -\frac{c\,D\,d\varrho}{\sqrt{1 - c^2 D^2 \varrho^2 (1 - \alpha\varrho)}} = -\frac{d\varrho}{\sqrt{\alpha\varrho^3 - \varrho^2 + \frac{1}{c^2 D^2}}} \quad (187)$$

Für die Bahnen von Lichtstrahlen, die in einer durch das Massenzentrum gehenden (nichteuklidischen) „Ebene“ verlaufen, tritt also Formel (187) an die Stelle von (159).

Zur weiteren Behandlung von (187) schlagen wir denselben Weg ein wie unter VIII. im Anschlusse an (159). Wir denken uns den Radikanden von (187) — zweiter Ausdruck — im Sinne von (160) in seine Wurzelfaktoren zerlegt und gelangen so durch Koeffizientenvergleich zu den jetzt gültigen Relationen:

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (188_1)$$

$$\varrho_0 \varrho_1 + \varrho_1 \varrho_2 + \varrho_2 \varrho_0 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (188_2)$$

$$\varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 = -\frac{1}{\alpha c^2 D^2} \quad \ldots \ldots \quad (188_3)$$

Indem wir uns vergegenwärtigen, daß das Analogon zur Lichtstrahlbahn der modernen Gravitationstheorie in der Newtonschen Physik bei Zugrundelegung der Hypothese von der Lichtschwere die Bahn eines aus dem Unendlichen mit der Geschwindigkeit c kommenden materiellen Körpers, also eine Hyperbelbahn wäre, übertragen wir die für einen beliebigen Kegelschnitt gültigen Formeln (161), (162) und (168) des Abschnittes VIII auch auf den jetzt vorliegenden Fall. Da ferner die dortige Formel (163) mit (188_1) identisch ist, können wir die gesamte unter VIII an Gleichung (159) angeschlossene Darstellung, wenn wir uns in gleicher Weise wie dort auch der Substitution (165) bedienen, hierher übertragen und damit auch deren Ergebnis:

$$d\varphi = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{p} - \frac{\alpha\varepsilon}{p}\cos\psi}} \quad \ldots \ldots \quad (169)$$

Dabei gelten für die Bestimmung von p und ε die Gleichungen (162) und (168), in welche die aus (188_1) bis (188_3) gewonnenen Werte von ϱ_1 und ϱ_2 einzusetzen sind.

Die Näherung, auf welche wir uns im vorliegenden Falle einzustellen haben, wird durch zwei Momente bestimmt. Erstens dadurch, daß die Krümmung der hyperbelähnlichen Bahn (im Hinblicke auf den außerordentlich großen Wert c der Lichtgeschwindigkeit in unendlicher Ferne vom Massenpunkt) voraussichtlich eine sehr schwache sein wird, d. h. daß wir die numerische Exzentrizität

$$\varepsilon >> 1$$

voraussetzen können. Zweitens dadurch, daß wir wegen der außerordentlichen Kleinheit von α

$$\frac{p}{\alpha} >> 1, \text{ ja sogar noch } \frac{p}{\alpha} >> \varepsilon$$

annehmen dürfen, eine Voraussetzung, welche auch noch für einen unmittelbar am Sonnenrande vorbeigehenden Lichtstrahl — dieser Fall soll uns später zur praktischen Erprobung dienen — zutrifft. Fassen wir beide Bedingungen zusammen, so haben wir für die näherungsweise Auswertung von (169)

$$\frac{p}{\alpha} >> \varepsilon >> 1 \text{ oder } \frac{\alpha}{p} << \frac{1}{\varepsilon} << 1 \quad . \quad . \quad . \quad (189)$$

anzunehmen, also $\frac{\alpha}{p}$ von höherer (zweiter) Ordnung klein gegenüber $\frac{1}{\varepsilon}$.

Unter Zugrundelegung von (189) erkennen wir, daß das im Radikanden von (169) auftretende Glied $\frac{3\alpha}{p}$ im Durchschnitt[1]) von höherer Kleinheit sein wird als $\frac{\alpha\varepsilon}{p}\cos\psi$, daß wir somit $\frac{3\alpha}{p}$ vernachlässigen dürfen, wenn wir eine Rechnung nur in erster Näherung anstreben. $\frac{\alpha\varepsilon}{p}$ ist ja im Sinne von (189) eine kleine Größe erster Ordnung. Wir können uns daher auch bei einer Reihenentwicklung der Wurzelgröße von (169) auf die beiden ersten Glieder beschränken:

$$d\varphi = \left(1 + \frac{\alpha\varepsilon}{2p}\cos\psi\right) d\psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (190)$$

Die Integration ist nun ohneweiters durchführbar und ergibt:

$$\varphi = \left| \psi + \frac{\alpha\varepsilon}{2p}\sin\psi \right|_0^{\psi} = \psi + \frac{\alpha\varepsilon}{2p}\sin\psi, \quad . \quad . \quad (191)$$

wobei wir mit Rücksicht auf den in der letzten Fußnote hervorgehobenen Umstand die eine Integrationsgrenze gleich Null gesetzt haben. Wir führen nun, indem wir von der Umrechnung in Formel (173) Gebrauch machen, anstatt ψ wieder ϱ und schließlich gemäß (157) r ein:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \arccos\frac{\varrho p - 1}{\varepsilon} + \frac{\alpha\varepsilon}{2p}\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho p - 1}{\varepsilon}\right)^2}, \\ \frac{\varrho p - 1}{\varepsilon} &= \cos\left[\varphi - \frac{\alpha\varepsilon}{2p}\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho p - 1}{\varepsilon}\right)^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (192)$$

oder

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\left[\varphi - \frac{\alpha\varepsilon}{2p}\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right)^2}\right]} \quad . \quad (193)$$

[1]) Die spätere Integration darf sich deswegen nicht nur über einen Bereich erstrecken, in welchem $\cos\psi \sim 0$ oder im Hinblicke auf $\cos\psi = \frac{\varrho p - 1}{\varepsilon}$ $\varrho = \frac{1}{r} \sim \frac{1}{p}$, d. h. $r \sim p$ ist.

Die Zählung des Azimuts φ beginnt beim Perizentrum (Perihel), da für $r = \frac{p}{1+\varepsilon}$ $\varphi = 0$ wird, wie eine einfache Rechnung zeigt. [Der im Nenner von (193) stehende Wurzelausdruck verschwindet für diesen Wert von r.]

(193) stellt wegen $\varepsilon > 1$ die Gleichung einer hyperbelartigen Kurve dar; die Abweichung von einer genauen Hyperbel kann wegen der Kleinheit von $\frac{\alpha\varepsilon}{p}$ nur sehr gering sein. Immerhin ist eine solche vorhanden und sie ist auch, wie wir sogleich erkennen werden, von einer erheblichen physikalischen Bedeutung.

Wir wollen unser Augenmerk auf die Lage der Asymptoten richten und zwar aus folgendem Grunde. Ihre Richtungen bestimmen offenbar mit bei weitem zureichender Genauigkeit in physikalischem Sinne die Richtung des in das Schwerefeld des Massenzentrums eintretenden, bzw. des dasselbe verlassenden Lichtstrahles. Ihr gegenseitiger Neigungswinkel δ bedeutet dann nichts anderes als den Winkel, unter welchem der Lichtstrahl durch den Massenpunkt aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird, also seinen Ablenkungswinkel (Abb. 17). Um diesen berechnen zu können, ermitteln wir zunächst die Richtung einer Asymptote durch jenen Wert φ^* des Azimuts φ, für welchen $r = \infty$ wird. Wir halten dabei an der Voraussetzung (189) fest, derzufolge wir die im Radikanden von (193) übrig bleibende Größe $\frac{1}{\varepsilon^2}$ als von der zweiten Ordnung klein gegenüber 1 vernachlässigen dürfen. Aus (193) ergibt sich sodann für $r = \infty$ die Bedingung:

$$1 + \varepsilon \cos\left(\varphi^* - \frac{\alpha\varepsilon}{2p}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (194)$$

oder

$$\cos\left(\varphi^* - \frac{\alpha\varepsilon}{2p}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi^* + \frac{\alpha\varepsilon}{2p}\right) = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Da nun $\frac{1}{\varepsilon}$ eine Größe erster Ordnung darstellt, können wir im Rahmen der beabsichtigten Näherung den Sinus durch sein Argument ersetzen:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi^* + \frac{\alpha\varepsilon}{2p} = -\frac{1}{\varepsilon},$$

woraus

$$\varphi^* = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\alpha\varepsilon}{2p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (195)$$

folgt. (195) bestimmt bei positiver Zählung des Azimuts φ^* (vom Perihel aus) die Richtung der einen, bei negativer Zählung die Richtung der anderen Asymptote. Ihr gegenseitiger Neigungswinkel δ ist daher im Hinblicke auf Abb. 17:

$$\delta = 2\varphi^* - \pi = \frac{2}{\varepsilon} + \frac{\alpha\varepsilon}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

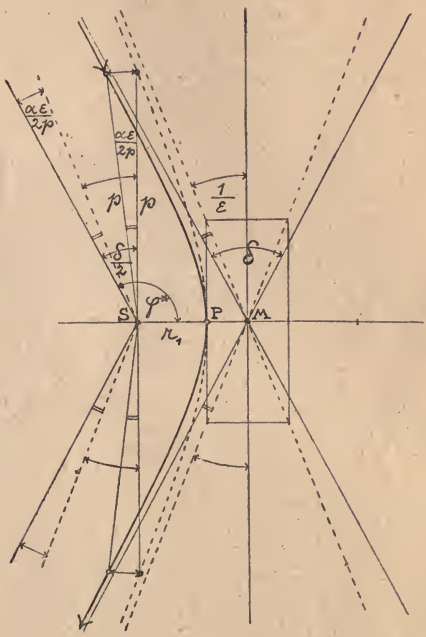


Abb. 17.

Ein am Massenzentrum vorbeigehender Lichtstrahl erfährt somit eine Ablenkung, deren Betrag durch (196) gemessen wird. Seine Bahn ist im Gravitationsfelde nicht mehr geradlinig, sondern hyperbelartig gekrümmt. Bei genau hyberbolischer Krümmung entfiele in (196) das zweite Glied, welches jedoch im Hin-

blicke auf (189) von derselben Größenordnung wie das erste ist, also neben diesem keineswegs vernachlässigt werden darf.[1])

Es bleibt uns noch eine wichtige Aufgabe: p und ε als Funktionen des Gravitationsradius α und der Konstanten D des Flächensatzes (184) zu ermitteln. Dabei wird sich auch eine einfache Deutung der letzteren ergeben. Zu diesem Ziele berechnen wir aus (188_2) und (162):

$$0 = \varrho_0(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_1\varrho_2 = \frac{2\varrho_0}{p} + \varrho_1\varrho_2$$

oder

$$\varrho_1\varrho_2 = -\frac{2\varrho_0}{p}$$

und mit Heranziehung von (188_3)

$$-\frac{1}{\alpha c^2 D^2} = \varrho_0\varrho_1\varrho_2 = -\frac{2\varrho_0^2}{p},$$

also

$$\varrho_0 = \frac{1}{cD}\sqrt{\frac{p}{2\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (197)$$

(188_1) liefert sodann zusammen mit (162) und (197) zur Bestimmung von p die Gleichung:

$$\frac{1}{cD}\sqrt{\frac{p}{2\alpha}} + \frac{2}{p} = \frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (198)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{p}} = x,$$

wodurch (198) übergeht in

$$x^3 - x + \frac{\alpha}{cD} = 0.$$

[1]) Die genaue Hyperbel mit ihren Asymptoten ist in Abb. 17 gestrichelt gezeichnet. Während bei dieser bekanntermaßen $r = p$ wird, sobald φ den Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt, tritt dies bei der hyperbelähnlichen Bahn (193), wie man leicht nachprüft, erst für $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha\varepsilon}{2p}$ ein. Dies wurde bei der Ausführung der Abb. 17 verwertet. Die Formeln (193), (195) und (196) gelten in erster Näherung für jede beliebige Bahn, auf welche die Voraussetzung (189) zutrifft. Für einen Lichtstrahl wird insbesondere, wie die folgende Untersuchung zeigen wird, $\frac{\alpha\varepsilon}{2p} = \frac{1}{\varepsilon}$.

In dieser Gleichung stellt mit Rücksicht auf (189) x eine Größe erster Ordnung dar, neben welcher x^3 ohneweiters vernachlässigbar ist. Wir erhalten daher in erster Näherung

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha}{p}} = \frac{\alpha}{cD},$$

woraus

$$p = \frac{2c^2D^2}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

folgt. Durch Einsetzung dieses Wertes in (197) wird

$$\varrho_0 = \frac{1}{\alpha}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (200)$$

Dies hat im Hinblicke auf (188_1) zur Folge, daß in erster Näherung

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0 \text{ oder } \varrho_2 = -\varrho_1 \quad \ldots\ldots \quad (201)$$

wird. Aus (200), (201) und (188_3) folgern wir weiter

$$-\frac{\varrho_1^2}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha c^2 D^2}$$

oder

$$\varrho_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{cD} \text{ oder } r_1 = cD. \quad \ldots\ldots \quad (202)$$

Damit haben wir die in Aussicht gestellte praktische Bedeutung der Konstanten D gefunden: Ihr Produkt mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist in erster Näherung gleich der Perihel-distanz r_1 des Lichtstrahls.

Zur Berechnung der Exzentrizität ε benützen wir die Gleichung (168), welche mit Verwendung von (201) und (202)

$$\frac{2\varepsilon}{p} = 2\varrho_1 = \frac{2}{cD} \text{ oder } \varepsilon = \frac{p}{cD}$$

liefert, woraus sich nach Einführung des Wertes (199) für p

$$\varepsilon = \frac{2cD}{\alpha} = \frac{2r_1}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (203)$$

ergibt. Die angestrebte Darstellung des Ablenkungswinkels δ als Funktion von α und D ist nun leicht gefunden; wir brauchen nur die Werte (199) und (203) in (196) einzusetzen:

$$\delta = \frac{\alpha}{c\,D} + \frac{2\,c\,D}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{2\,c^2\,D^2} \text{ [1)]} = \frac{2\,\alpha}{c\,D} \quad . \quad . \quad . \quad (204)$$

oder mit Beachtung von (202)

$$\delta = \frac{2\,\alpha}{r_1} = \frac{2\,\alpha \,.\, 180 \,.\, 60^2}{r_1\,\pi}\,'' \text{ (Bogensekunden).} \quad (205)$$

Wäre die Lichtstrahlbahn eine genaue Hyperbel, wie sie vom Standpunkte der Newtonschen Mechanik unter der Annahme der Lichtschwere zu erwarten und auch unschwer zu berechnen [2])

---

[1]) $\frac{\alpha}{p} = \frac{\alpha^2}{2\,c^2\,D^2}$ erweist sich somit, verglichen mit $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2\,c\,D}$, in Übereinstimmung mit der Voraussetzung (189) als klein von der zweiten Ordnung.

[2]) In der Newton'schen Mechanik lautet der Energiesatz — siehe die Formel (140″) —

$$\frac{v^2}{2} - k^2\,\frac{M}{r} = -\,E; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

der Flächensatz bei Zugrundelegung ebener Polarkoordinaten — siehe Formel (150) —

$$r^2\,\frac{d\varphi}{dt} = C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Für die Geschwindigkeit v gilt:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

Aus (I), (II) und (III) folgt:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\,2\,E + \frac{2\,k^2\,M}{r} - \frac{C^2}{r^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV$$

und durch Division von (II) durch (IV):

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C}{r^2\sqrt{-\,2\,E + \frac{2\,k^2\,M}{r} - \frac{C^2}{r^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

Die Integration, die sich mit Einführung der reziproken Entfernung $\varrho = \frac{1}{r}$ sehr einfach bewerkstelligen läßt, liefert:

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{C^2}{k^2\,M}\,\varrho - 1}{\sqrt{1 - \frac{2\,E\,C^2}{k^4\,M^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

oder

$$r = \frac{\frac{C^2}{k^2\,M}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\,E\,C^2}{k^4\,M^2}}\,.\,\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad (VI')$$

ist, so entfiele in (196) nach einer dort gemachten Bemerkung das zweite Glied und es ergäbe sich mit Rücksicht auf (203) und (202) für den Ablenkungswinkel

$$\delta = \frac{2}{\varepsilon} = \frac{\alpha}{c\,D} = \frac{\alpha}{r_1}, \quad \ldots\ldots \quad (106)$$

also nur der halbe Wert von (205).

Eine geeignete diesbezügliche Beobachtung muß hier notwendig zu einem experimentum crucis werden. Allerdings kommt bei der verhältnismäßigen Schwäche aller der Beobachtung zugänglichen kosmischen Schwerefelder — man beachte die Kleinheit selbst

---

woraus sich

$$p = \frac{C^2}{k^2 M},\quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2EC^2}{k^4 M^2}} \quad \ldots\ldots \quad (VII)$$

ergibt. (Die Zählung der Koordinate φ beginnt beim Perihel.)

Führen wir im Sinne der Emissionstheorie Newtons die Hypothese der Lichtschwere in die Mechanik ein, so müssen wir einen Lichtstrahl mit einem materiellen Punkt identifizieren, der, mit der Lichtgeschwindigkeit c aus dem Unendlichen kommend, in das Schwerefeld der Zentralmasse M eintritt. Aus (I) erhalten wir so für $r = \infty$:

$$-E = \frac{c^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad (VIII)$$

Zufolge Formel (125) ist

$$\alpha = \frac{2k^2 M}{c^2} \text{ oder } k^2 M = \frac{c^2 \alpha}{2} \quad \ldots\ldots \quad (IX)$$

Wir setzen (VIII) und (IX) in (VII) ein:

$$p = \frac{2C^2}{c^2 \alpha},\quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{4C^2}{c^2 \alpha^2}} \quad \ldots\ldots \quad X)$$

Es ergibt sich somit für den Lichtstrahl eine hyperbolische Bahn ($\varepsilon > 1$) und unter der Voraussetzung einer sehr schwachen Krümmung, also für $\varepsilon >> 1$, wird in erster Näherung:

$$\varepsilon = \frac{2C}{c\,\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (XI),$$

und die Periheldistanz

$$r_1 = \frac{p}{1+\varepsilon} \sim \frac{p}{\varepsilon} = \frac{C}{c}. \quad \ldots\ldots \quad (XII)$$

Mithin gewinnen wir jetzt für den Ablenkungswinkel δ des Lichtstrahls (Asymptotenwinkel), den wir durch dieselbe Überlegung wie oben ermitteln, in erster Näherung die Formel:

$$\delta = \frac{2}{\varepsilon} = \frac{c\,\alpha}{C} = \frac{\alpha}{r_1}, \quad \ldots\ldots \quad (XIII)$$

welche mit (206) übereinstimmt.

des Gravitationsradius α_S der Sonne, siehe Formel (144_2) — nur ein einziger Fall als Erfolg versprechend in Betracht. Er betrifft die Ablenkung eines unmittelbar an der Sonne vorbeigehenden Lichtstrahles. Diese Erscheinung kann jedoch nur während der kurzen Dauer einer totalen Sonnenfinsternis beobachtet werden, da sonst die Sonne das Licht der umgebenden Fixsterne überstrahlt. In der Tat wurden von englischen Expeditionen gelegentlich der Sonnenfinsternis am 29. Mai 1919 in Nordbrasilien und auf der Insel Principe Beobachtungen angestellt, die für die Strahlenablenkung am Sonnenrande die Werte $1{\cdot}98'' \pm 0{\cdot}12''$, bezw. $1{\cdot}61'' \pm 0{\cdot}30''$ ergaben[1]). Wir wollen nun durch Rechnung feststellen, zugunsten welcher der beiden Formeln (205) und (206) die Entscheidung hiedurch gefallen ist.

Für einen unmittelbar an der Sonne vorbeigehenden Lichtstrahl haben wir in (205) und (206) α gleich dem Gravitationsradius α_S der Sonne gemäß (144_2), die Periheldistanz r_1 gleich dem Sonnenhalbmesser zu setzen:

$$\alpha_S = 2{\cdot}97\ km,$$
$$r_1 = 695500\ km.$$

Die Berechnung des Ablenkungswinkels δ nach der Einsteinschen Formel (205) ergibt:

$$\delta = \frac{2 \,.\, 2{\cdot}97 \,.\, 180 \,.\, 60^2}{695500 \,.\, \pi}'' = 1{\cdot}76'',$$

nach der Newtonschen Formel (206) dagegen nur den halben Wert:

$$\delta = 0{\cdot}88''.$$

Damit erscheint im Hinblicke auf die oben mitgeteilten Beobachtungsergebnisse die Entscheidung in sehr befriedigender Weise zugunsten Einsteins gefallen.

* * *

Schlußwort.

In diesem Buche wurde der Versuch unternommen, mit verhältnismäßig elementaren Mitteln einen durchaus exakten Weg zu jenen lichten Höhen zu weisen, welche uns die Ideen Einsteins von einer physikalischen Geometrie oder geometrischen Physik erschlossen haben. In der engen Verkettung der hisher wesensfremden Wissenschaften: Geometrie und Physik und in der

[1]) F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson, Phil. Trans. Roy. Soc., A 220 (1920), S. 291.

damit erzielten Vereinheitlichung unserer Erkenntnis liegt der unschätzbare Wert dieser neuen Gedanken. Ihre praktischen Auswirkungen sind zwar noch sehr gering — es kann dies bei der Kleinheit der zu erwartenden Effekte und der Unvollkommenheit unserer Beobachtungsmittel auch gar nicht anders sein — nur wenige Vorgänge wie die in dieser Schrift behandelte Perihelvorrückung des Merkur und die Ablenkung der Lichtstrahlen im Schwerefelde sind geeignet, zu ihrer Prüfung zu dienen. Bei dem durchwegs günstigen Ergebnisse dieser Erprobungen aber kann auch der praktische Wert der neuen Lehre nicht mehr bezweifelt werden, wenngleich ihr erkenntnistheoretischer gegenwärtig weitaus größer ist.

Bei dem nicht unbedeutenden Umfange des in diesem Buche Gebotenen ist aber doch nur eine erste Staffel erklommen. Die Theorie der stetig ausgebreiteten Materie wurde als über den Rahmen hinausgehend ausgeschaltet und demgemäß der Ausbau der Feldgleichungen (92) nicht durchgeführt. Dies war für die Untersuchung des Schwerefeldes eines einzelnen Massenpunktes eben nicht nötig. Aber erst dieser Ausbau bedeutet den eigentlichen Kern der Einsteinschen Lehre. Durch ihn wird erst die wahre Verschmelzung von Geometrie und Physik Wirklichkeit, allerdings nur von Geometrie und Physik der Materie d. h. der Schwerefelder. Das elektromagnetische Feld als solches steht dabei als von anderer Wesenheit ganz außerhalb. Aber auch seine Aufnahme in den Bereich der Geometrie, freilich einer noch allgemeineren als der Riemannschen ist bereits vollzogen, durch Hermann Weyl. Seine Ideen erscheinen uns hier als ein weit entferntes Ziel.

Verlag von Franz Deuticke in Leipzig und Wien

Lehrbuch der physikalischen Chemie

für technische Chemiker und zum Gebrauche an technischen Hochschulen und Bergakademien

Von **Hanns v. Jüptner**

o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

I. Teil: **Materie und Energie.** — Mit 21 Abbildungen. — Preis *M* 20.—

II. Teil: **Chemisches Gleichgewicht und Reaktionsgeschwindigkeit**

Erste Hälfte: **Homogene Systeme.** — Mit 6 Abbildungen. — Preis *M* 18.—

Zweite Hälfte: **Heterogene Systeme.** — Mit 68 Abbildungen. — Preis *M* 22.—

Die angewandte Elastizitäts- und Festigkeitslehre

Auf Grundlage der Erfahrung

bearbeitet von

L. Tetmajer

Professor an der Technischen Hochschule in Wien,
Mitglied der königl. Schwed. Akademie der Wissenschaften

Dritte, umgearbeitete Auflage

Mit 294 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. — Preis *M* 80.—

Lehrbuch der chemischen Technologie der Energien

Von **Hanns v. Jüptner**

o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

I. Band: **Die chemische Technologie der Wärme und der Brennmaterialien**

Erster Teil: **Wärmemessung, Verbrennung und Brennmaterialien.** — Mit 118 Abbildungen. — Preis *M* 35.—

Zweiter Teil: **Die technischen Feuerungen und Kälteerzeugung.** — Mit 182 Abbildungen. — Preis *M* 35.—

II. Band: **Die chemische Technologie der mechanischen Energie. Explosivstoffe und Verbrennungsmotoren.** — Mit 51 Abbildungen. — Preis *M* 25.—

III. Band: **Die chemische Technologie der strahlenden und der elektrischen Energie.** — Mit 203 Abbildungen. — Preis *M* 50.—

Vorlesungen über technische Mechanik elastischer Körper

Von **Ing. Bernhard Kirsch**

Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Preis *M* 40.—

Über Stoß, Relaxation und Sprödigkeit

Ein Beitrag zur technischen Mechanik zäher Körper

Von **Ing. Bernhard Kirsch**

Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Mit 10 Abbildungen im Text. — Preis M 9.—

Verlag von Franz Deuticke in Leipzig und Wien

Die Energie und ihre Formen

Kritische Studien

Von **Dr. A. Helfenstein**

Preis *M* 21.—

Lehrbuch der Physik

Von **Dr. L. Graetz**

Professor an der Universität München

Vierte, umgearbeitete Auflage. — Mit 269 Abbildungen.
Preis geh. *M* 50.—, geb. *M* 90.—

Das Atom — ein räumliches Planetensystem

Von **Dr. phil. Rudolf Schmid**

Assistent für Physik an der Tierärztlichen Hochschule in Wien

Mit 12 Abbildungen im Text. — Preis *M* 15.—

Grundlagen der experimentellen Magie

Von **Ing. Dr. techn. Pollak-Rudin** und **Dr. med. et phil. Fritz Schulhof**

Preis *M* 12.—

Magie als Naturwissenschaft

Von **Ing. Dr. techn. Robert Pollak-Rudin**

Preis *M* 11.—

Fünfstellige mathematische und astronomische Tafeln

zum Gebrauche für Mathematiker, Astronomen, Geographen und Seeleute

Mit einer Formelsammlung

Von **Dr. Friedrich Bidschof** und **Arthur Vital**

Preis *M* 38.—

Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers

Von **Dr. Lothar Schrutka**

Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn

Preis *M* 15.—

Buchdruckerei der Manzschen Verlags- und Universitäts-Buchhandlung in Wien

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
Los Angeles
This book is DUE on the last date stamped below.

REC'D PHYS. LIB.

OCT 19 1993

MAY 06 1994

UCLA-Physics Library
QC 178 B3 1922
L 006 578 931 5
B3
1922
UC SOUTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY
AA 000 571 907 5